第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

正则轨道的存在性与有限群的幂零长*

王　燕　鸣
(中山大学数学系, 广州510275)

摘　要　本文给出了一些正则轨道存在性的条件, 结合A. Turull的近期定理, 得到了关于有限可解群的幂零长的一些结论.

关键词　可解群, 幂零长, 正则轨道
分类号　AMS(1991) 20D15, 20D45/CCL O152.1

§1　引　言

考虑有限群G在其作用群A的作用下的不动点子群$C_G(A)$对G的幂零长的控制是群论研究中颇为重要的课题[1]-[4]. 探求正则轨道的存在性对群论中的一些其它重要问题也很有帮助. A. Turull已将著名的幂零长猜想在很大程度上化为正则轨道的存在性问题[1],[2], Berger, Hargrave, Gow等人对A为幂零群时的情形有深入且复杂的讨论[8]-[10]. 本文对正则轨道的存在性的一般条件作一些探讨, 利用Gluck关于奇阶置换群的一个深刻结论, 对A为奇阶群的临界情形加以刻画. 作为应用, 简化并推广了一些已知结论.

§2　正则轨道的存在性

引理2.1　设有限群A作用在集合V上, 则V上有k个正则轨道当且仅当$\left|V-\bigcup_{g\notin C_A(V)}C_V(g)\right|\geq k\left|A/C_A(V)\right|$, 其中$k$为任意正整数.

证明　设$|A:C_A(V)|=n$且$1=g_1,g_2,\cdots,g_n$为$C_A(V)$在A中的全体陪集代表. 如果V上有k个正则A-轨道, 设它们分别由$x_1,\cdots,x_k$产生. 则任取$x_i^{g_j}$, $1\leq i\leq k$, $1\leq j\leq n$, 有$x_i^{g_j}\notin\bigcup_{g\notin C_A(V)}C_V(g)$. 事实上, 若存在$g\notin C_A(V)$, 使$x_i^{g_jg}=x_i^{g_j}$, 则$g_jgg_j^{-1}\in C_A(x_i)=C_A(V)\trianglelefteq N_A(V)=A$. 故$g\in C_A(V)$. 矛盾. 从而$\left|V-\bigcup_{g\notin C_A(V)}C_V(g)\right|\geq kn$.

反之, 若$\left|V-\bigcup_{g\notin C_A(V)}C_V(g)\right|\geq k\left|A/C_A(V)\right|$. 任取$x\in V-\bigcup_{g\notin C_A(V)}C_V(g)$, 均有$|x^A|=|A/C_A(V)|$. 事实上, $x^{g_i}=x^{g_j}$当且仅当$x^{g_ig_j^{-1}}=x$, 当且仅当$g_ig_j^{-1}\in C_A(x)$及$x\in C_V(g_ig_j^{-1})$. 由x的选取知$x\in C_V(g_ig_j^{-1})$当且仅当$g_ig_j^{-1}\in C_A(V)$当且仅当$g_i=g_j$. 此外x^A必为正则A-

* 1993年8月2日收到. 国家青年自然科学基金资助项目.

轨道. 事实上, 若 $g \in C_A(x)$, 则 $x \in C_V(g)$. 由 x 的选取知 $g \in C_A(V)$. 这样, $\{x^{g_1}, x^{g_2}, \cdots, x^{g_n}\}$ 恰为 x 产生的轨道 x^A. 由已知的不等式知 V 上至少有 k 条正则轨道.

引理 2.2 设群 A 为 Dedkind 群(即 A 的每个子群皆为正规子群). 如果 A 不可约地作用在集合 V 上, 则 V 的每个元素都产生一条正则轨道. 特别地, 若 $|V|$ 有限, 则

$$|V| \equiv 0 (\bmod |A / C_A(V)|).$$

证明 任取 $x \in V$, 如果 $g \in C_A(x)$, 则 $x^g = x$, 故 $x \in C_V(g) = C_V(\langle g \rangle)$, 但因 $\langle g \rangle \trianglelefteq A$, $C_V(\langle g \rangle)$ 是 V 的 A-不变子集. 由于 A 不可约地作用在 V 上, 有 $C_V(g) = V$, 即 $g \in C_A(V)$. 即 x 产生 V 上的正则轨道. 由于 $A / C_A(V)$ 忠实地不可约地作用在 V 上, 若 $|V|$ 有限, 则由前面所证易知 $A / C_A(V)$ 有限, 且 V 的每个元素 x 产生的正则轨道的长度为 $|A / C_A(C)|$, 从而 $|V| = m|A / C_A(V)|$, 其中 m 为 V 中不同的正则轨道的个数.

引理 2.3 设群 A 作用在群 V 上, 如果 $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m$, 其中 V_i 为 A-不变子群, 如果对每个 $i \in \{1, \cdots, m\}$, V_i 上有 k_i 个正则 A-轨道, 则 V 上有 $\prod_{i=1}^{m} k_i$ 个正则 A-轨道.

证明 设 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{k_i}}$ 产生 V_i 上的 k_i 个正则 A-轨道, 其中 $i = 1, \cdots, m$, 则 $x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{mj_m}$ 产生 V 的 $\prod_{i=1}^{m} k_i$ 个正则 A-轨道. 其中 $1 \le j_i \le k_i$, $i = 1, \cdots, m$. 事实上, 若存在 $g \in A$, 使得 $(x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{mj_m})^g = x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{mj_m}$, 则对每个 $i \in \{1, \cdots, m\}$, 有 $x_{ij_i}^g \in V_i$ 且 $x_{ij_i}^g = x_{ij_i}$. 从而 $g \in \bigcap_{i=1}^{m} C_A(x_{ij_i}) = \bigcap_{i=1}^{m} C_A(V_i) = C_A(V)$, 即这 $\prod_{i=1}^{m} k_i$ 个元素分别产生 V 上的正则轨道. 另外, 若存在 $g \in A$, 使 $(x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{mj_m})^g = (x_{1j_1'} x_{2j_2'} \cdots x_{mj_m'})$, $1 \le j_i, j_i' \le k_i$, 则 $x_{ij_i}^g = x_{ij_i'}$ 对每个 i 成立. 由于 $x_{ij_i}, x_{ij_i'}$ 产生 V_i 上的正则轨道, 由前提条件知 $j_i = j_i'$ 对每个 i 成立, 即这 $\prod_{i=1}^{m} k_i$ 个元素产生 V 上的 $\prod_{i=1}^{m} k_i$ 个不同的正则轨道. 证毕.

定理 2.4 设 A 为奇阶群, K 为特征为 p 的域, p 为奇素数, V 为域 K 上的 A-模, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ 且 A 可迁地置换集合 $\{V_i: i = 1, \cdots, m\}$, 若 $N_A(V_1)$ 在 V_1 上有 k 个正则轨道, 则 A 在 V 上至少有 k 个正则轨道, k 为任意正整数.

证明 考虑集合 $S = \{V_1, \cdots, V_m\}$, 由条件, A 产生 S 上的置换, A 自然地产生 S 的幂集合 2^S 上的一个置换(方式为 $\{V_{11}, \cdots, V_{1i}\} \xrightarrow{g} \{V_{11}g, \cdots, V_{1i}g\}$). 由于 $C_A(2^S) = C_A(S) = \bigcap_{i=1}^{m} N_A(V_i)$ (固定 S 中的每个元素), 这样 $A / C_A(S)$ 为 S 上的一个奇阶置换群. 由 Gluck 的一个深刻结论(文献[7]推论1)知, A 在 2^S 上有正则轨道, 即存在 $S_1 \subseteq S$, 使得 $N_A(S_1) = C_A(2^S) = C_A(S) = \bigcap_{i=1}^{m} N_A(V_i)$. 由于 A 可迁地置换 S, 可设 $V_l = V_1 g_l$, $g_l \in A$. 由于 $(N_A(V_1))^{g_l} = N_A(V_l)$, V_1 有 k 个正则 $N_A(V_1)$-轨道当且仅当 V_l 有 k 个正则 $N_A(V_l)$-轨道. 因此不失一般性可设 $V_1 \in S_1$ 且有 $S_1 = \{V_1, V_2, \cdots, V_l\}$, 其中 $1 \le l \le m$. 若 $m = 1$, 则结论自明. 故设 $m > 1$ 且 $V \ne \{0\}$. 设 $N_A(V_1) = A_1$, 由于 A 可迁地作用在 S 上, 有 $|A : A_1| = m$, 设 $1 = g_1, g_2, \cdots, g_m$ 为 A_1 在 A 中的全体陪集代表且不妨设 $V_i = V_1 g_i$. 因 V_1 上有 k 个不同的正则 A_1-轨道. 设 x_1 产

生V_1上的一个正则A_1-轨道, 则由$C_{A_1}(x_1) = C_{A_1}(V_1) = C_A(V_1)$. 令$x = x_1 + x_1g_2 + \cdots + x_1g_l - (x_1g_{e+1} + \cdots + x_1g_m)$, 则$x \in V$ 且$\pm x_1g_i \in V_1g_i = V_i$.

(1) x 产生V 上的一个正则A-轨道

事实上, 任取$g \in C_A(x)$, 则

$$x_1 + x_1g_2 + \cdots + x_1g_l - (x_1g_{l+1} + \cdots + x_1g_m)$$
$$= x = xg = (x_1g + x_1g_2g + \cdots + x_1g_lg) - (x_1g_{l+1}g + \cdots + x_1g_mg). \qquad (*)$$

先证$g \in N_A(S_1)$. 如果$g \notin N_A(S_1)$, 则存在$1 \le i \le l$与$j > l$, 使得$V_ig = V_j$. 因此$x_1g_ig \in V_ig = V_j$, 从而由(*)式知$x_1g_ig = -x_1g_j$, 故$V_1g_ig = V_1g_j$. 因此$g_igg_j^{-1} \in N_A(V_1) = A_1$, 即存在$g_0 \in A_1$使得$g_ig = g_0g_j$. 这样有$-x_1g_j = x_1g_ig = x_1g_0g_j$, 即$-x_1 = x_1g_0, x_1g_0^2 = x_1$. 从而$g_0^2 \in C_{A_1}(x_1) = C_{A_1}(V_1)$. 因$A_1/C_{A_1}(V_1)$为奇阶群, 故$g_0 \in C_{A_1}(V_1)$, 即$-x_1 = x_1g_0 = x_1$. 从而$2x_1 = 0$, 由于$\mathrm{ch}K = p$, 知$px_1 = 0$, 由于$(2, p) = 1$, 知$x_1 = 0$与选取矛盾. 从而有$g \in N_A(S_1)$. 但已知$N_A(S_1) = C_A(2^S) = \bigcap_{i=1}^{m} N_A(V_i)$, 故有$x_1g_ig \in V_ig = V_i$. 由(*)式得$x_1g_ig = x_1g_i$对每个$i \in \{1, \cdots, m\}$成立. 由于$V_1g_igg_i^{-1} = V_1g_ig_i^{-1} = V_1, g_igg_i^{-1} \in N_A(V_1) = A_1$. 由$x_1g_igg_i^{-1} = x_1$得$g_igg_i^{-1} \in C_{A_1}(x_1) = C_{A_1}(V_1) = C_A(V_1)$. 从而对每个$i \in \{1, \cdots, m\}$有$g \in g_i^{-1}C_A(V_1)g_i = C_A(V_1g_i) = C_A(V_i)$, 即$g \in \bigcap_{i=1}^{m} C_A(V_i) = C_A(V)$.

(2) V 上至少有k个不同的正则轨道

事实上, 如果y_1产生V_1上的另一个正则A_1-轨道, 令$y = y_1 + y_1g_2 + \cdots + y_1g_l - (y_1g_{l+1} + \cdots + y_1g_m)$. 由(1)知$y$产生$V$ 上一个正则轨道, 只要证明这两个轨道不同即可. 如果不然, 则存在$g \in A$, 使$xg = y$. 如果g把S_1中的元素都变到$S - S_1$中且同时把$S - S_1$中的元素都变到S_1中, 则g为S上的偶置换, 与假设矛盾. 故存在$1 \le i, j \le l$, 或$l \le i, j \le m$, 使$V_ig = V_j$, 不妨设$1 \le i, j \le l$. 由$V_1g_ig = V_1g_j$, 得$g_igg_j^{-1} \in A_1$. 故存在$g_0 \in A_1$使$g_ig = g_0g_j$. 由于$xg = y$, 得$x_1g_0g_j = x_1g_ig = y_1g_j$, 即$x_1g_0 = y_1$, 与$x_1, y_1$在不同的$A_1$-轨道选取矛盾. 这表明$x$与$y$产生不同的$A$-轨道. 由于$V_1$上至少有$k$个不同的正则$A_1$-轨道, 由上述作法知$V$ 上至少有k个不同的正则A-轨道. 证毕.

定理的条件中关于作用群A为奇阶及域K的特征为奇数的条件都不能去掉.

例 2.4.1 作用群A非奇阶. 取$A = Z_2 \sim Z_2$为2阶循环群与对换$\langle(1, 2)\rangle$的圈积, 作用在群$C_3 \times C_3$上, 可视作$\mathbf{F}_3A$-模. 为明确说明, 记$A = \langle z_1\rangle \sim \langle z_3\rangle = (\langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle) \times \langle z_3\rangle$, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle = C_3 \times C_3$. 作用及定义为$z_1^{z_3} = z_2, z_2^{z_3} = z_1, a^{a_1} = a^2, b^{z_2} = b^2, a^{z_3} = b, b^{z_3} = a, a^{z_2} = a, b^{z_1} = b, a^3 = b^3 = z_1^2 = z_2^2 = z_3^2 = 1$. 易知上述方式是良定义的, 此时$A$可迁地作用在集$S = \{\langle a\rangle, \langle b\rangle\}$上. $A_1 = N_A(\langle a\rangle) = \langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle$, 显然$A_1$在$\langle a\rangle$上有正则轨道$a^{A_1}$, 但$V = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$上没有正则$A$-轨道. 事实上, $C_A(V) = C_A\langle a\rangle \cap C_A\langle b\rangle = \langle z_2\rangle \cap \langle z_1\rangle = 1$, A忠实作用在V上. 而$\langle a\rangle \in C_V(z_2), \langle b\rangle \in C_V(z_1)$, $\left|V - \bigcup_{1 \ne g \in G} C_V(g)\right| \le 3 < |A|$, 由引理2.1知$V$上无正则$A$-轨道.

例 2.4.2 域K的特征不是奇素数. 考虑C_3作用在$C_2 \times C_2$上. 令$A = C_2 \sim C_3$为3阶循环群C_3与3阶置换$\langle(1, 2, 3)\rangle$的圈积按标准方式作用在$V = (C_2 \times C_2) \times (C_2 \times C_2) \times (C_2$

$\times C_2$) 上 具体方式如下: $V = \langle a_1\rangle \times \langle b_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b_2\rangle \times \langle a_3\rangle \times \langle b_3\rangle, A = \langle z_1\rangle \sim \langle z_4\rangle = (\langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle \times \langle z_3\rangle) \times \langle z_4\rangle, z_4 = (1, 2, 3)$. $a_i^{z_i} = b_i, b_i^{z_i} = a_ib_i, (a_ib_i)^{z_i} = a_i, a_i^{z_4} = a_{(i)z_4}, b_i^{z_4} = b_{(i)z_4}, z_i^{z_4} = z_{(i)z_4}$ 对 $i = 1, 2, 3$ $a_i^{z_j} = a_i, b_i^{z_j} = b_i$, 对 $i \neq j$ 且 $1 \leq i, j \leq 3$ 记 $V_i = \langle a_i\rangle \times \langle b_i\rangle$. 则 $V = V_1 \times V_2 \times V_3$ 为 $\mathbf{F}_2A$ - 模, 此时 $N_A(V_1) = \langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle \times \langle z_3\rangle = A_1, C_A(V_1) = \langle z_2\rangle \times \langle z_3\rangle$. $C_{A_1}\langle a_1\rangle = C_{A_1}(V_1)$. 故 $\langle a_1\rangle$ 产生 V_1 上的正则 A_1 - 轨道 显然 A 可迁地置换 $\{V_1, V_2, V_3\}$, 又 $C_A(V) = \bigcap_{i=1}^{3} C_A(V_i) = 1$, 即 A 忠实地作用在 V 上 显然 $\left|V - \bigcup_{1\neq g\in A} C_V(g)\right| \leq 64 < 8\left| = |A\right|$, 由引理 2 1 知 V 上没有正则 A - 轨道

§3 应 用

性质 3 1 设 A 为一 Dedekind 群, K 上的 KA - 模, 则 V 上有正则 A - 轨道

证明 对 $|A| + |V|$ 归纳, 由引理 2 3, 不妨设 V 为忠实的不可约的 KA - 模 由引理 2 2 得 V 上有正则 A - 轨道

定理 3 2 设 A 为奇阶幂零群, K 为域, K 的特征为奇素数 p 或为 0 若 $p \mid |A|$, 则每个 KA - 模均有正则 A - 轨道 若 $V \neq \{0\}$, 则当 $\mathrm{ch}K = p$ 时, V 上至少有两个正则 A - 轨道

证明 对 $|A| + |V|$ 归纳 由于 $\mathrm{ch}K = p \mid |A|$ 及 $\mathrm{ch}K = 0$ 都保证 KA - 模的完全可约性 由引理 2 3, 不妨设 V 为忠实的不可约的 KA - 模 设 $N \trianglelefteq A$, 由 Clifford 定理[6], $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, 其中每个 V_i 都是一些同构的不可约 KN - 子模的直和, 且 A 可迁地置换 $\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$. 如果 $m > 1$, 则因 $|V_1| < |V|$, 且 $(N_A(V_1), V_1)$ 满足定理中的条件, 由归纳假设, V_1 上有正则 $N_A(V_1)$ - 轨道 由定理 2 4 得, V 上有正则 A - 轨道 故可设 $m = 1$ 由[6]之定理 3 2 3 知 A 的每个交换正规子群皆为循环群 由于 A 为幂零群, $A = A_{q_1} \times A_{q_2} \times \cdots \times A_{q_n}$ 为 Sylow 子群的直积 这样又有 A_{q_i} 的每个交换正规子群皆为循环群 由[6]中定理 5 4 10(i) 知 A_{q_i} 为奇阶循环群, 从而得出 A 为循环群 由性质 3 1 知 V 上有正则 A - 轨道

至于定理的后半部分结论, $|A|$ 与 $\mathrm{ch}K = p$ 均为奇数且 $p \mid |A|$ 同前面的归纳证明一样, 可将情形化归为 V 是忠实的不可约 KA - 模且 A 为奇阶循环群 此时由引理 2 2 知 V 的每个非单位元都产生一个正则轨道 由于 $V \neq \{0\}$, $\mathrm{ch}K = p$ 为奇数, 有 $|V| - 1$ 为偶数 视 A 作用在 $V^{\#}$ 上, 有 $|V^{\#}| = |V| - 1 = k|A|$, 其中 k 为不同的正则轨道数 由前面已知 $k \neq 0$, 故 $k \geq 2$

定理 3 3 设 A 为奇阶群, V 为一完全可约 KA - 模, K 为一特征为奇素数 p 的有限域 $p \mid |A|$, 如果对 A 的每个截断 B, 有 $(|B|, \prod_{q\in\pi(F(B))}(q - 1)) = 1$, 并且有 $\min\pi(A) \geq 7$, 则 V 上有正则 A - 轨道

证明 取 V 为使 $|A| + |V|$ 极小的反例, 由引理 2 3 可设 V 为忠实的不可约 KA - 模 由定理 3 2 的前段的证明, 可设 A 的每个交换正规子群皆循环 设 $q_1, \cdots, q_n$ 为 $F(A)$ 的全体素因子, 令 Z 为 $Z(F(A))$ 的阶为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的子群 则 $Z \,\mathrm{char}\, Z(F(A)) \,\mathrm{char}\, F(A) \,\mathrm{char}\, A$, 从而有 $N_A(Z) = A$, 且 $A / C_A(Z) \leq \mathrm{Aut}(Z)$. 故有 $C_A(Z) = A$. 由[13]推论 2 4, 存在 $E, T \trianglelefteq A$, 满足:

(1) $ET = F(A)$, 且 $E \cap T = Z$;

(2) T 循环, 且 E 的每个 Sylow 子群为素数阶循环群或为方指数为素数的超特殊群;

(3) A 幂零当且仅当 $A = T$;

(4) $T = C_A(E)$ 且 $F(A) = C_A(E/Z)$;

(5) E/Z 的每个 Sylow 子群是初等交换群且为完全可约的 $A/F(A)$-模

基于上述事实, 可证如下:

(a) A 非幂零且 $F(A)$ 非交换, $T = Z(F(A))$.

事实上, 若 $F(A)$ 交换, 则由归纳的性质知 $F(A)$ 循环, 由(2) 知 E 循环且 $E = Z$. 由(4) 知 $T = A$, 由(3) 得 A 幂零, 由定理3. 2 知 V 上有正则 A-轨道, 矛盾. 由(4) 与(1) 立即得 $T = Z(F(A))$.

由(a) 知 $E \neq Z$ 且 $|E/Z|$ 为一平方数(由(2) 可得). 记 $e^2 = |E/Z| = |F(A)/T|$. 事实上 $e = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdots q_k^{m_k}$, 其中 q 是使 E 的 Sylow q-子群为 q^{2m+1} 阶的超特殊子群. 由归纳假设及(5) 知 E/Z 的每个非单位的 Sylow 子群上都有正则 $A/F(A)$-轨道. 故 $|A/F(A)| \leq e^2$.

令 W 为 V 的一个不可约 T-子模. T 的每个子群都是 A 的正规子群. 因 W 上的每个非单位元素都产生一个正则 T-轨道, 由引理2. 2 知, $|T| \mid |W| - 1$. 同[13] 引理2. 5 之证明有 V 的每个不可约 $F(A)$-子模的阶均为 $|W|^e$. 对每个 $1 \neq y \in Z(F(A))$ 有 $[V, y]$ 为 A-不变的, 故 $[V, y] = V$. 由[14] 的引理知 $|C_V(a)| \leq \frac{4}{9}\dim_K(V)$ 对每个 $1 \neq a \in A$ 成立. 由引理2. 1, 只需证明 $|V - \bigcup_{1\neq a\in A} C_V(a)| > 0$ 即可导出矛盾, 完成证明. 由上式, 只要证明 $|V| - |A||V|^{4/9} \geq 0$, 即

$$|V|^{5/9} \geq |A|. \tag{b}$$

由于 $|F(A)| = |T||E/Z| = |T|e^2$, 从而 $|A| \leq |T|e^4$, 而由于 $|T| \mid |W| - 1$, 且 $|T|$, $|W|$ 均为奇数, 故 $|W| \geq 2|T|$. 又因

$$|V|^{5/9} \geq |W|^{5/9} \geq (2|T|)^{5e/9}. \tag{c}$$

故欲证(b) 式只需证明

$$(2|T|)^{5e/9-1} \geq e^4. \tag{d}$$

如果 e 不是素数, 则 $e \geq 49$, 且 $|T| \geq 7$, 显然 $(2|T|)^{5/9\times 49-1} > (49)^4$, 故(d) 式成立.

现只能是 e 为素数. 注意到此时由于 $E \cap T = Z$, 知 $e \mid |T|$. 如果 $e \geq 11$, 由 $(2(T))^{5/9\times 11-1} \geq (22)^4 > (11)^4$ 知(d) 式成立. 下面只需证 $e = 7$ 时(b) 式成立. 事实上只要证 $(2|T|)^{35/9} \geq 7^4|T|$, 即证明 $2^{35/9} \geq 7^{36/9}/|T|^{26/9}$. 因 $|T| \geq 7$, 故右边 $\leq 7^{10/9} = 7 \times 7^{1/9}$. 而左边 $= 8 \times 2^{8/9} \geq 8 \times 8^{1/9} >$ 右边. 故恒有(b) 式成立, 即 V 上有正则 A-轨道. 与选取矛盾. 定理证毕.

定理3. 4 设 G 为有限(可解群), A 为 G 的作用群, 如果 $C_G(A) = 1$ 且 $(|G|, |A|) = 1$. 则在下列条件之一成立时, G 的幂零长不超过 $|A|$ 的素因子个数:

(1) A 的每个真子群皆为 Dedekind 群.

(2) $2 \mid |GA|$ 且 A 的每个真子群为幂零群.

(3) $2 \mid |GA|$, 对 A 的每个真截断 B, 恒有 $(|B|, \prod_{q\in\pi(F(B))}(q-1)) = 1$ 且 $\min\pi(A) \geq 7$.

证明 任取 A 的真子群 B 及 G 的 B-不变的不可约截断 S, 由 G 可解知, S 为初等交换 p-群对某个 $p \in \pi(G)$, S 为 $\mathbf{F}_p$ 上的不可约的 $\mathbf{F}_pB$-模. 由 Turull 定理[1] 结合定理3. 1, 3. 2 及3. 3 分别得出在条件(1), (2), (3) 下结论成立.

上述定理中 G 的可解性条件通常是自含的[5].

参 考 文 献

[1] A. Turull, *Fixed point free action with regular orbits*, J. Reine Angrew. Math., 371(1986), 67-91.

[2] A. Turull, *Group of automorphisms and centralizers*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 107(1990), 227-238.

[3] J. Thompson, *Automorphisms of solvable groups*, J. Algebra, 1(1964), 259-267.

[4] J. Shamash and E. Shult, *On groups with cyclic cater subgroups*, J. Algebra, 11(1969), 564-597.

[5] **陈重穆, 王燕鸣, 带作用的极小非可解群, 科学通报**, 22(1989), 1691-1693.

[6] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Chelsea, New York, 1980.

[7] D. Gluck, *Trivial set-stabilizers in finite permutation groups*, Can. J. Math., 35(1983), 59-67.

[8] T. Berger, *Representation Theory and Solvable Groups, Santa Cruz Conference on Finite Groups*,, Provkidence, Rhode Island, 1980, Amer. Math. Soc., 431-444.

[9] R. Gow, *On the number of characters in a p-block of a p-solvable group*, J. Algebra, 65(1980), 421-426.

[10] B. Hargrave, *The existence of regular orbits for nilpotent groups*, J. Algebra, 72(1981), 54-100.

[11] A. Espulas, *A theorem of Hall-Higman type for groups of odd order*, Arch. Math., 55(1990), 218-223.

[12] A. Turull, *Examples of centralizers of automorphism groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 91(1984), 537-539.

[13] T. Wolf, *Solvable and nilpotent subgroups of GL* (n, q^m), Cam. J. Math., 34(1982), 1097-1111.

The Existence of Regular Order and the Nilpotency Length of Finite Groups

Wang Yanming
(Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract

We give some criterions for the existence of regular orbits. Combine with Turull's theorems, we get some recults on nilpstency length of finite solvable groups.

Keywords solvable groups, nilpotency length, regular orbit.