第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol.16 No.3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

素环的对称双导与交换性*

邓　清
(西南师范大学数学系, 重庆630715)

摘　要　本文讨论当一个素环容许一个非零对称双导时, 其迹函数与此环的交换性的关系, 得到了与[4,5]类似的结果

关键词　素环, 交换性, 对称双导.
分类号　AMS(1991) 16U80, 16W25/CCL

对称双导(Symmetric bi-derivation)的概念由Maksa在文[1]中引入: R 为一结合环, $D: R\times R\to R$ 的映射, 若 $D(x,y)=D(y,x)$ 且 D 对两个分量都是可加的, 即 $D(x+y,z)=D(x,z)+D(y,z)$, 此外还满足 $D(xy,z)=D(x,z)y+xD(y,z)$, 称 D 为 R 的一个对称双导. 令 $d(x)=D(x,x)$, 称 d 为 D 的迹函数. 在研究环的交换性时, 对称双导的迹函数与导子有很多类似的作用[2],[3].

引理1　R 是特征不为2和3的素环, D 为 R 的对称双导. 若 $[x^2,d(x)]\in Z(R)$, $\forall x\in R$, 其中 d 为 D 的迹, 则 $[x^2,d(x)]=0$.

证明　令 $t=t(x)=[x^2,d(x)]\in Z(R)$, 用 x^2+x 代条件式中的 x, 则

$$x^4d(x^2)+x^4d(x)+4x^3D(x^2,x)+x^2d(x^2)+x^2d(x)+2x^4D(x^2,x)+2x^3d(x^2)$$
$$+2x^3d(x)+2x^2D(x^2,x)-d(x^2)x^4-d(x)x^4-4D(x^2,x)x^3-d(x^2)x^2-d(x)x^2$$
$$-2D(x^2,x)x^4-2d(x^2)x^3-2d(x)x^3-2D(x^2,x)x^2\in Z(R).$$

用 $-x$ 代上式的 x, 然后与上式相加, 并利用 $[x^4,d(x^2)]\in Z(R)$ 及 $[x^2,d(x)]\in Z(R)$ 可化简得到

$$6[x^4,d(x)]+6x^3d(x)x-6xd(x)x^3\in Z(R), \tag{1}$$

但 $[x^4,d(x)]=x^2[x^2,d(x)]+[x^2,d(x)]x^2=2tx^2$, 并且 $x^3d(x)x-xd(x)x^3=x[x^2,d(x)]x=t(x)x^2$, 故(1)为 $18tx^2\in Z(R)$, 若 $t\neq0$, 则 $x^2\in Z(R)$, 从而 $[x^2,d(x)]=0$, 总之 $t=0$.

引理2　R 是特征不为2, 3的素环, d 为 R 的非零对称双导 D 的迹函数. 若 $[x^2,d(x)]=0$, $\forall x\in R$, 则 R 无非零幂零元.

证明　若 R 有非零幂零元, 必有 $0\neq a\in R$ 使 $a^2=0$.

易见, $d(ra)=r^2d(a)+2rD(r,a)a$, 且由 $D(r,a^2)=0$ 可得 $D(r,a)a=-aD(r,a)$.

用 ra 代 $[x^2,d(x)]=0$ 中的 x, 则 $\forall r\in R$ 有

$$(ra)^2d(ra)=d(ra)(ra)^2. \tag{2}$$

---

* 1993年9月29日收到

(2)式右乘 a 有 $(ra)^2r^2d(a)a=0$, 用 $rd(a)$ 代 r 后可得, $(rd(a)a)^2(rd(a))^2d(a)a=0$, 由[6]知, $d(a)d(a)a=0$. 但 $0=D(a,a^2)=ad(a)+d(a)a$, 故 $d(a)ad(a)=0$.

用 $ra+a$ 代 $[x^2,d(x)]=0$ 中的 x 有

$$(ra)^2d(ra)+(ra)^2d(a)+2(ra)^2D(ra,a)+arad(a)+arad(ra)+2araD(ra,a)$$
$$=d(ra)(ra)^2+d(a)(ra)^2+2D(ra,a)(ra)^2+d(a)ara+d(ra)ara+2D(ra,a)ara,$$

用 $-r$ 代上式的 r 后与上式相加减并利用(2)式, 分别有

$$(ra)^2d(a)+2araD(ra,a)=d(a)(ra)^2+2D(ra,a)ara, \tag{3}$$

$$2(ra)^2D(ra,a)+arad(a)+arad(ra)=2D(ra,a)(ra)^2+d(a)ara+d(ra)ara, \tag{4}$$

用 $2r$ 代(4)中 r:

$$16(ra)^2D(ra,a)+2arad(a)+8arad(ra)$$
$$=16D(ra,a)(ra)^2+2d(a)ara+8d(ra)ara, \tag{5}$$

而(4)式乘8减(5)式得 $6arad(a)=6d(a)ara$, 故有 $ardd(a)=d(a)ara$, 用 $d(a)r$ 代 r 利用 $d(a)ad(a)=0$ 有 $ad(a)rad(a)=0$, 从而 $ad(a)=0$ 且 $d(a)a=-ad(a)=0$. 由此, (3)式化为

$$2araD(ra,a)=d(a)(ra)^2, \tag{6}$$

但 $aD(ra,a)=-D(ra,a)a=-rd(a)a-D(r,a)a^2=0$, 故(6)式化为 $d(a)(ra)^2=0$, 再由[6], $d(a)=0$.

用 $x+a$ 代 $[x^2,d(x)]=0$ 中的 x 有

$$2[x^2,D(a,x)]+[ax+xa,d(x)]+[ax+xa,D(x,a)]=0, \tag{7}$$

用 $-x$ 代 x, 然后分别与(7)式相加减得

$$[ax+xa,D(x,a)]=0, \tag{8}$$

$$2[x^2,D(a,x)]+[ax+xa,d(x)]=0. \tag{9}$$

将(8)式右乘 a, 则

$$axD(x,a)a-D(x,a)axa=0, \tag{10}$$

用 $x+y$ 代(8)中 x, 利用(8)有

$$[ax+xa,D(y,a)]+[ay+ya,D(x,a)]=0,$$

用 ya 代其中 y, 则 $[ax+xa,D(a,y)a]+[aya,D(x,a)]=0$, 即

$$axD(a,y)a+xaD(a,y)a-D(a,y)axa+ayaD(x,a)-D(x,a)aya=0,$$

取 $y=x$, 注意到 $xaD(a,x)a=-xD(a,x)a^2=0$ 及 $axD(a,x)a=-axaD(a,x)$, 从而有 $2D(a,x)axa=0$, 故由(10),

$$axaD(a,x)=D(a,x)axa=0.$$

线性化 $D(a,x)axa=0$, 则

$$D(a,x)aya+D(a,y)axa=0, \tag{11}$$

(11)式右乘 $D(a,y)$, 得 $D(a,y)axaD(a,y)=0$, 从而有 $aD(a,y)=0$, 特别

$$aD(a,xy)=0,\ axD(a,y)=0,$$

故 $D(a,y)=0$, 由此, (9)式化为 $[ax+xa,d(x)]=0$, 用 $x+y$ 代 x 有

$$[ax+xa,d(y)]+2[ay+ya,D(x,y)]+[ay+ya,d(x)]+2[ax+xa,D(x,y)]=0,$$

用 $-x$ 代 x, 然后与上式相加得

$$[ay+ya,d(x)]+2[ax+xa,D(x,y)]=0,$$

用 ya 代 y, $[aya, d(x)]+2[ax+xa, D(x,y)a]=0$, 然后右乘 a 可得 $ayad(x)a=0$, 故 $ad(x)a=0$. 而 $ad(x+y)a=0$ 导出 $aD(x,y)a=0$, 即 $aD(xa,y)=0$, 用 yz 代 y 有 $ayD(xa,z)=0$, 故 $D(xa,z)=0$, 再由 $D(xya,z)=0$ 有 $D(x,z)ya=0$, 从而 $D(x,z)=0$, $\forall x,z\in R$. 这与 D 为非零对称双导矛盾, 故 R 无非零幂零元.

有了以上准备, 可得

定理1 R 是特征不为2, 3的素环, D 为 R 的一个非零对称双导, 若 D 的迹 d 满足关系 $[x^2, d(x)]\in Z(R)$, $\forall x\in R$, 则 R 可换.

证明 由引理1, $x^2d(x)=d(x)x^2$, 用 $x+x^2$ 代 x, 因

$$
\begin{aligned}
&(x+x^2)^2d(x+x^2)\\
&\quad=x^4D(x^2,x)+x^4D(x,x^2)+2x^3d(x^2)+2x^3d(x)+x^2D(x^2,x)+x^2D(x,x^2)\\
&\quad=6x^5d(x)+6d(x)x^5+4x^3d(x)+2d(x)x^3,\\
&d(x+x^2)(x+x^2)^2=2D(x^2,x)x^4+2d(x^2)x^3+2d(x)x^3+2x^2D(x^2,x)\\
&\quad=6x^5d(x)+6d(x)x^5+4d(x)x^3+2x^3d(x),
\end{aligned}
$$

从而 $2x^3d(x)=2d(x)x^3=2x^2d(x)x$, 即 $x^2[x,d(x)]=0$, 但由引理2, R 无非零幂零元必无零因子, 故 $[x,d(x)]=0$, 由[2, Theorem 2], R 可换.

利用如下引理, 还可得到一个与[5]之结论平行的结果.

引理3 R 为素环, d 为 R 的对称双导 D 的迹, 若 $xd(x)\pm d(x)x\in Z(R)$, 则当 $Z(R)\neq\{0\}$ 时有 $xd(x)-d(x)\in Z(R)$.

证明 若 R 的特征为2, 结论显然. 下设 R 的特征不为2, 令

$$A=\{x\in R\mid xd(x)+d(x)x\in Z(R)\};\quad B=\{x\in R\mid xd(x)-d(x)x\in Z(R)\}.$$

取 $0\neq t\in Z(R)$, $\forall x\in A$, 下证 $x\in B$.

若 $x+t\in A$, 则

$$(x+t)(d(x)+2D(x,t))+(d(x)+d(t)+2D(x,t))(x+t)\in Z(R).$$

因导子总是保持中心的, 且 $D(x,*)$ 为 R 的导子, 故 $D(x,t)\in Z(R)$, $d(t)=D(t,t)\in Z(R)$, 进而有

$$2x(d(t)+2D(x,t))+2td(x)\in Z(R),\tag{12}$$

(12) 式与 x 交换相乘得到, $2t[x,d(x)]=0$, 从而有 $[x,d(x)]=0$, 即 $x\in B$.

若 $x+t\in B$, 则 $(x+t)d(x+t)-d(x+t)(x+t)\in Z(R)$, 即

$$x(d(x)+d(t)+2D(x,t))-(d(x)+d(t)+2D(x,t))x\in Z(R),$$

利用 $d(t), D(x,t)\in Z(R)$ 有 $[x,d(x)]\in Z(R)$, 即 $x\in B$.

因此, $\forall x\in A$ 有 $x\in B$, $R=B$.

定理2 若 R 是特征不为2, 3的素环, d 为 R 的非零对称双导 D 的迹, 则当 $xd(x)\pm d(x)x\in Z(R)$ 时, R 可换.

证明 若 $Z(R)=\{0\}$, 则 $xd(x)\pm d(x)x=0$, 从而有 $x^2d(x)=d(x)x^2$, 由定理1, R 可换, 矛盾. 故 $Z(R)\neq 0$, 由引理3, $[x,d(x)]\in Z(R)$, $\forall x\in R$, 再由文[2, Theorem 2], R 可换.

参 考 文 献

[1] Gy. Maksa, *A remark on symmetric biadditive functions having nonnegative diagonalization*, Galsnik Mat., 15(1980), 279-282.

[2] J. Vukman, *Symmetric bi-derivations on prime rings and semiprime rings*, Aequationes Math., 38(1989), 245-254.

[3] J. Vukman, *Two results concerning symmetric bi-derivations in prime rings*, Aequationes Math., 40(1990), 181-189.

[4] Q. Deng, *Derivations in prime rings*, Rend. Circolo Mat. Palermo 42(1993), 21-28.

[5] Y. Hirano and H. Tominaga, *Some commutativity theorems for prime rings with derivations*, Math. J. Okayama Univ., 26(1984), 101-108.

[6] A. Richoux, *A theorem for prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 77(1979), 27-31.

Symmetric Bi-derivations and Commutativity of Prime Rings

Deng Qing

(Dept. of Math., Southwest China Normal Univ., Chongqing)

Abstract

Let R be a ring with center $Z(R)$. A mapping $D: R\times R\to R$ is called a symmetric bi-derivation, if $D(x,y)=D(y,x)$, $D(x+y,z)=D(x,z)+D(y,z)$ and $D(xy,z)=D(x,z)y+xD(y,z)$ for all $x,y,z\in R$. We show that a prime ring R with char$R\neq 2,3$, admitting a nonzero symmetric bi-derivation D, is commutative if either $[x^2,D(x,x)]\in Z(R)$ for all $x\in R$ or $xD(x,x)\pm D(x,x)x\in Z(R)$ for all $x\in R$.

Keywords prime ring, commutativity, symmetric bi-derivation.