第22卷第4期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

明安图与 Catalan 数*

刘 建 军
(西北大学数学系,陕西 西安 710069)

摘 要:中国数学家明安图在其《割圜密率捷法》中最先应用了 Catalan 数,取得优秀的研究成果.本文简介明安图的计数成就和 Catalan 数,综述国内外对明安图应用该数的研究.特别地,近两年来英国的 Larcombe 发表了5篇文章,对明安图的成果——包含 Catalan 数的 sin $(2p\alpha)$展开式,加以推广,并给出明安图确定 Catalan 数的第二种方法的严格代数证明.

关键词:明安图;Catalan 数;组合数学;计数函数.
分类号:AMS(2000) 01A25,05-02/CLC O112
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2002)04-0589-06

1 明安图简介

明安图(约1692—1765?),蒙古族,中国清代著名天文学家、数学家和测绘学家.1710年入钦天监学习天文、历法和数学,从此开始了他的科学研究生涯.1700年法国传教士杜德美(Pierre Jartoux,1668—1720)来到中国,带来了三个圆函数的无穷级数展开式,即 I. Newton1676年所创的π的展开式,J. Gregory1667年所创的正弦、正矢展开式,但他却未带来这三个公式的证明和推导过程.明安图得知这三式后,决心利用中国传统的数学方法搞清楚它们的原理.他依据"古法"进行了大量的推算,创造了连比例求解的一整套数学方法,在证明杜氏三术时还获得了六个新的幂级数展开式,同时他还得到了 $\sin(m\alpha)$ $(m=2,3,4,5,10,100,1000,10000)$的八个函数的幂级数展开式,在推求这八个展开式过程中,明安图提出现今所称的 Catalan 数,并在随后的运算中多次使用该数列.

明安图的成果用文字叙述,据文献[2][5][12]的归纳,他主要获得了关于 Catalan 数的三个公式(表示成现代形式)

$$C_{n+1}=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n-k}{k+1}C_{n-k},(C_1=1,n\geqslant 1). \quad (1)$$

此式应用于

$$\sin 2\alpha=2\left\{\sin\alpha-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{2^{2n-1}}\sin^{2n+1}(\alpha)\right\}, \quad (2)$$

* 收稿日期:2000-11-27
作者简介:刘建军(1973-),男,内蒙古宝昌人,在读博士研究生.

$$
\begin{cases}
M_1(x) = x, M_2(x) = x^2, \\
M_{p+1}(x) = \left\{2\sum_{k=1}^{p-1} M_k(x) + M_p(x)\right\} M_p(x), p \geqslant 2, \\
\sum_{k=1}^{p} M_k(x) = \sum_{k=1}^{p} C_{k-1} x^k + R_p(x), p \geqslant 3.
\end{cases}
\tag{3}
$$

他还在求 $\sin 3\alpha$ 和 $\sin 10\alpha$ 的幂级数展开式时应用了 Catalan 数. 另外，明安图用卷积公式

$$
C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-k} C_k, (n \geqslant 2) \tag{4}
$$

对 Catalan 数进行计算.

明安图的数学成就收录于他的遗著《割圜密率捷法》(下称《捷法》)中. 在中国数学史上，明氏开创了新的研究方法，他的成就不仅在分析学中的无穷级数方面，而且对组合数学中的计数理论，特别是计数函数——Catalan 数，取得了最早的研究成果. 他为中算史上无穷级数运算奠定了基础，同时开创了中算研究计数函数和级数反演的先河. 明安图的数学成果和方法在中国数学史上对后人有很大启发，形成历时一百多年的无穷级数研究潮流.

2 Catalan 数

组合计数理论中，数列 $C_n = \{1,1,2,5,14,42,\cdots\}(n=0,1,2,3,\cdots)$ 被称为 Catalan 数，一般认为，C_n 有三种等价定义[1]：

(1) 将正 n 边形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_n$ 用不相交的对角线剖分为三角形的方法数为 C_n；

(2) n 个数 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ 依序两两乘积的结合方法数为 C_{n+1}；

(3) 在整数坐标平面格子上，从 $(0,0)$ 到 (n,n) 点的非降路径数为 C_{n+2}.

它的计数公式和生成函数分别为：

$$
C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad (n = 0,1,2,3,\cdots) \tag{5}
$$

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right), \quad |x| < \frac{1}{4}. \tag{6}
$$

1838 年，E. Catalan 发表论文讨论了现今的 Catalan 问题：n 个不同因子间连续作乘法，如何确定求积方法数？他获得 Catalan 数的计数公式(5)及卷积递推式(4)，后该数列被冠以其名. 实际上，大数学家 Euler 在 18 世纪中期研究多边形的三角形剖分问题时已发现此数列及其生成函数，1758 年，J. A. V. Segner 解决了 Euler 多边形问题，给出递推关系

$$
E_{n+1} = E_{n-1}E_2 + E_{n-2}E_3 + \cdots + E_2 E_{n-1}, \tag{7}
$$

即公式(4)，其中 $E_{n+1} = C_n$.

在历史上，中国的明安图比 Euler 早 10—20 年就得出该数列且加以应用[2].

Catalan 数是组合计数理论中重要的计数函数，迄今已有 600 余篇论文发表，找出了它的多种计数公式和几十种组合意义. 在序贯计数理论中，Catalan 数用于研究多重集合排列的枚举，它还出现在投票问题(Ballot Problem)，平面树的枚举问题(Tree Enumeration Problem)，二分树(Binary Tree)等众多问题中[3].

3 中国国内对明安图的研究

李俨、钱宝琮和李迪诸先生较早地研究了明安图，但对其数学研究成就的深入探讨始于20世纪80年代[4]. 这里只介绍明安图在Catalan数方面的研究成果.

罗见今教授对明安图的这一计数成果进行了较系统全面的研究，主要有：1988年发表“明安图是卡塔兰数的首创者”，叙述组合数学中著名的Catalan数在西方的发展历史和现代研究状况，指出明安图在18世纪30年代先于Euler(1758)和Catalan(1838)提出这种计数函数；1989年发表“明安图创卡塔兰数的方法分析”，对明氏展开 $sin2\alpha$ 的有关三种方法给出了详细的分析，从中得出结论：明安图事实上已经用两种与现今全然不同的计数公式获得了Catalan数；随后的“中国数学史上的Catalan数”(英文)和“18—19世纪中国数学的计数成果”(英文)向西方介绍了中国数学史上的这一成就；1998年，出版了《割圜密率捷法译注》，该书向世人展示了明安图完整的数学研究方法及成果.

明安图在《捷法》卷三中对 $\sin2\alpha$ 展开为 $\sin\alpha$ 的幂级数过程中，提出了四种几何模型，应用两种递归方法给出了Catalan数[5]. 前三种几何模型为构造割圆几何图形，应用“率”——公比不同的连比例建立割圆八线(即正弦线，正矢线等)之间的关系，把这些几何量代表的数量关系代数化，从而确定特定的代数关系式. 第四种几何模型是构造磬折形，通过磬折形的面积关系确定代数式.

通过第一个几何模型，确立关系式

$$\frac{x^{2n}}{4^{2n-1}}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{q^{2n+2k}}{4^{2n+2k-2}}, \tag{8}$$

其中 $k,n=0,1,2,3,\cdots,x,q$ 为割圆中的线段. 接着需消去式(8)中含有 $q^i(i>2)$ 的项，为达到这一目的，需对式(8)两端按 $n=1,2,3,\cdots$ 的顺序依次乘以 $1,1,2,5,14,\cdots$，再对所得的 n 个多项式求和，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{x^{2n}}{4^{2n-2}}=q^2. \tag{9}$$

上面所乘数列便是Catalan数. 那么如何确定 C_n 呢？明安图的作法为在确定式(9)，即求各 q^i 多项式之和过程中同时确定 C_n，

$$C_2=C_1=1,\quad C_3=2C_2=2,\quad C_4=\binom{3}{1}C_3-\binom{2}{2}C_2=5,$$

$$C_5=\binom{4}{1}C_4-\binom{3}{2}C_3=14,\quad C_6=\binom{5}{1}C_5-\binom{4}{2}C_4+\binom{3}{3}C_3=42,\quad\cdots$$

递次算出所求 C_n，即可归纳而得公式(1).

明氏求 C_n 数的第二种方法为：构造磬折形模型，利用各磬折形关系得出代数式

$$r_n=\Big(2\sum_{k=1}^{n-2}r_k+r_{n-1}\Big)r_{n-1}/2c\quad(n\geqslant3), \tag{10}$$

其中 $r_1=x^3/4,r_2=x^5/4^3,c$ 为磬折形中的线段. 现对各 r_n 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{2n+1}/4^{2n-1}, \tag{11}$$

式(11)中包含 C_n,为确定 C_n 明安图采取第二种方法.规定 $M_1=x, M_2=x^2$,列出式子

$$M_{n+1}(x) = \left(2\sum_{k=1}^{n-1} M_k(x) + M_n(x)\right) M_n(x) \quad (n>2). \tag{12}$$

对(12)式前 n 项求和

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i x^i + R(x^{n+1}) + \cdots. \tag{13}$$

利用此法可递次求出 C_n 数.

明安图求 Catalan 数的这两种方法新颖独特,是现今数学所未知的.文献[5]给出了这两个结果的详细推导过程.《捷法》用文字叙述,这两个结果并无现代证明.英国学者 P. J. Larcombe 用代数方法完整地证明了式(13),这实际是世界上第一个 Catalan 数的生成函数,Larcombe 博士很高兴地说,他第一个完成了这一证明.

明氏的割圆连比例法对中算后继研究者提供了方法.清代项名达在其《象数一原》中研究了二项式的展开,他在构造递加数与半递加数的过程中也得出了 Catalan 数[6]及该数与递加数之间的一些关系式.

4 西方对明安图的研究

西方学者对明安图较早较全面的研究始于法国国家科学研究中心的学者 C. Jami. 1984 年在北京召开的第三次国际中国科学史学术会议上,Jami 提交了研究明安图的论文,1985 年她以明安图的数学著作《捷法》为题完成博士论文,1988 年又发表论文[7],1990 年出版研究明安图的专著.

Jami 使用大量资料,对明安图的工作背景进行了概括性评论,分析了明安图的割圆展开幂级数方法,对割圆连比例中的"率"给予细致解释,但她并未提及明氏对 Catalan 数的认识和应用.

直到近两年,西方学者再次注意到明安图及其在计数研究中优秀的数学成就——Catalan 数的首创和应用.英国 Derby 大学数学-计算机系的 P. J. Larcombe 博士通过文献[2],[7-9]了解了明安图对 Catalan 数的研究,并在此基础上陆续发表了五篇文章[10-14]向西方阐释了明安图的这一首创性工作,对 Catalan 数的历史给予澄清、补充.他再次强调,中国清代明安图早于 Euler10—20 年已认识到 Catalan 数这一史实,现并不广为人知;为了更接近 Catalan 数发展的真实历史,则需要对明安图的数学成就加以重视.他还就明安图对 Catalan 数的研究进一步地深入和推广,得出新的内容.

对 $\sin(m\alpha), m=2,4,\cdots$ 的 $\sin\alpha$ 的展开式明安图已获得,Larcombe 将其推广,对整数 $p\geqslant 1$, $\sin(2p\alpha)$ 的 $\sin(\alpha)$ 无穷级数展开式中出现 $\sin(\alpha)$ 的前 p 个奇次幂,而剩余的 $\sin(\alpha)$ 的奇次幂系数由含有 p 个 Catalan 数列元素的一个特殊线性函数决定,如下所示.

$$\sin(2p\alpha) = 2\left\{\sum_{n=1}^{p} \alpha_n^{(p)} \sin^{2n-1}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} f_p(n) g_p(C_n,\cdots,C_{n+p-1}) \sin^{2(n+p)-1}(\alpha)\right\}, |\alpha| < \pi/2,$$

其中 $\alpha_n^{(p)}$ 为常数, f_p, g_p 为函数.

对于 $p=1$,式(4)即可写为

$$\sin(2\alpha)=2\left\{\sin(\alpha)-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{C_n}{2^{2n-1}}\sin^{2n+1}(\alpha)\right]\right\},$$

那么,$\alpha_1^{(1)}=1, f_1(n)=-1/2^{2n-1}, g_1(C_n)=C_n$;

对 $p=2$,则

$$\sin(4\alpha)=2\left\{2\sin(\alpha)-5\sin^3(\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8C_n-C_{n+1}}{4^n}\sin^{2n+3}(\alpha)\right\},$$

那么,$\alpha_1^{(2)}=2, \alpha_2^{(2)}=-5, f_2(n)=4^{-n}, g_2(C_n,C_{n+1})=8C_n-C_{n+1}$.

在[12]中,Larcombe 用 12 页的篇幅详细地证明了明安图《捷法》中第二种求 C_n 数的生成函数式(3)及方法的正确性.

命题 令

$$N_p(x)=\sum_{i=1}^{p}M(x)\quad(p\geqslant 1),\tag{14}$$

则 $N_p(x)=\sum_{i=1}^{p}C_{i-1}x^i+O(x^{p+1})+\cdots+O(x^{2^p-1})$. 这里 C_n 数列首项记为 C_0,即任意的正整数 $p\geqslant 1$,函数 $N_p(x)$ 是一个幂次为 2^{p-1} 的有限次幂级数,它是前 $p+1$ 个 C_n 数的生成函数,其中初值 $C_0=1$.

Larcombe 通过一个引理和一个定理证明了该命题的正确性.

引理 $N_{p+1}(x)=N_1(x)+N_p^2(x), p\geqslant 1$.

定理 若设 $N_p(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_{(p,i)}x^i$,则 $A_{(p,i)}=A_{(p-1,i)},\quad i=1,2,\cdots,p-1$.

该定理说明了 $N_p(x)$ 与 $N_{p-1}(x)$ 展开式中 x 的前 $p-1$ 项幂的系数相同. 通过这两个结论,继而用归纳法证明了 $A_{(p,i)}=A_{(p-1,i)}, i=1,2,\cdots p$,从而证明了式(14)的展开式中包含 Catalan 数.

Larcombe 的这些工作把对明安图数学成果的研究推向一个新的高度,这是继 Jami,罗见今之后的又一深入探索,这些工作不仅确认明安图是 Catalan 数的首创者,又将数学史上的数学结果和方法与现代数学相联系,使数学史中的内容成为新知识的一个生长点.

参考文献:

[1] 胡冠章,等. 组合数学与图论手册 [M]. 北京:清华大学出版社,1999.

[2] 罗见今. 明安图是卡塔兰数的首创者 [J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1988, (2): 239—245.

[3] WEISSTEIN W. *Catalan number*. http://www.math.pku.edu.cn/wk/Encyclopedia/contents/CatalanNumber.html.

[4] 方 匀. 明安图研究 [J]. 内蒙古师范大学学报(科学史增刊), 1993, **3**: 44—47.

[5] 罗见今. 明安图创卡塔兰数的方法分析 [J]. 内蒙古师大学报, 1989, **1**: 29—40.

[6] 特古斯. 《象数一原》中的卡塔兰数 [M]. 数学史研究文集(二),内蒙古大学出版社,九章出版社,1991.

[7] JAMI C. *Western influence and Chinese tradition in an eighteenth century Chinese mathematical work* [J]. Hist. Math., 1988, **15**: 311—331.

[8] LUO J J. *Catalan numbers in the history of mathematics in China*, *in Yap* [J]. H. P., Ku, TH., Lloyd,

E. K. and Wang, Z. M. (Eds), Combinatorics and graph theory, World Scientific, Singapore, 1993, 68—70.

[9] 罗见今. 割圜密率捷法译注 [M]. 内蒙古教育出版社,1988.

[10] LARCOMBE P J. *On the history of the Catalan numbers: A First Record in China* [J]. Mathematics Today, 1999, **35**(3): 89.

[11] LARCOMBE P J. *The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers* [J]. Mathematical Spectrum, 1999/2000, **1**: 5—7.

[12] LARCOMBE P J. *On a finite polynomial generating function for Catalan subsequences: An 18th century observation proved* [J]. Congressus Numerantium, 1999, **141**: 49—60.

[13] LARCOMBE P J. *On Catalan numbers and expanding the sine function* [J]. Bulletin of the ICA. 2000, **28**: 39—47.

[14] LARCOMBE P J. *On the generating function of the Catalan sequence: a historical perspective* [J]. Congressus Numerantium, 2001, **149**: 97—108.

Ming Antu and Catalan Numbers

LIU Jian-jun

(Dept. of Math., Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Ming Antu, a famous mathematician in Qing Dynasty, had obtained important achievements in counting theory. Ming Antu and Catalan Numbers are described concisely in this article. The status of study on Ming Antu and his excellent achievement-Catalan Numbers both in and outside China is showed. Recently, P. J. Larcombe has made further studies on Ming Antu's counting achievement, and drawn a conclusion of expanding the function sin ($2p\alpha$) on the base of Ming's study. The precise combination of Catalan Numbers is involved in this expansion. Moreover, he gave a strict algebraic proof to the second result of Ming on Catalan Numbers. These historical problems become a new starting point for current research.

Key words: Ming Antu; Catalan numbers; combinatorics; counting function.