第22卷第4期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

关于 Duffing 方程周期解的存在与唯一性*

陈红斌， 虞 烈， 袁小阳
（西安交通大学，陕西 西安 710049）

摘 要：考虑微分方程 $\ddot{x}+g(x)=p(t)$，其中 $g(x)\in C^1(R)$，$p(t)\in C(R)$ 为 2π 周期函数，本文在假设 $g'(x)<0$ 条件下，完整地给出周期解的存在唯一性的充分与必要性条件，并在 $g'(x)\leqslant a<1$ 时给出周期解的存在性结果.

关键词：Duffing 方程；周期解；重合度.
分类号：AMS(2000) 34C25/CLC O151.21
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)04-0615-06

1 引 言

关于 Duffing 方程的调和解存在已有非常深人结果，60 年代至 70 年代具有代表性的结果是关于严格非共振条件下周期解的存在与唯一性，即当 $g(x)$ 满足

$$m^2<\lambda\leqslant g'(x)\leqslant\mu<(m+1)^2,\quad g(0)=0,\quad m\in N\cup\{0\}. \tag{1.1}$$

Duffing 方程

$$\ddot{x}+g(x)=p(t)$$

的 2π 周期解是存在唯一.

1982 年丁同仁在弱共振情形比较完整地解决了周期解的存在性[6]，自然的问题是当 $g'(x)<0$，时，周期解是否存在？何时存在唯一，本文利用 Mawhin 提出的重合度方法，彻底解决了在 $g'(x)<0$ 情形下，周期性的存在唯一性，并获得在此情形下，周期解存在唯一性的充要条件，这一结果恰好是条件(1.1)的补充.

2 预备知识

设 X,Z 为实 Banach 空间，L：$\mathrm{dom}\,L=D\subset X\to Z$ 表示为零的 Fredholm 算子，$P:X\to X$，$Q:Z\to Z$ 为连续投影，且 $R(P)=N(L)$，$N(Q)=R(L)$，此时 $X=N(L)\oplus N(P)$，$Z=R(L)\oplus R(Q)$，$K:R(L)\to N(P)\cap D$ 为 L 的广义逆，且 $J:R(Q)\to N(L)$ 为线性同胚，则 Mawhin 重合度理论中的延拓定理可表述为

* 收稿日期：1999-11-29
作者简介：陈红斌(1962-)，男，安徽人，副教授.

定理 A[4] 设 $\Omega \subset X$ 为有界开集，$F:X \to Z$ 连续且在 $\bar{\Omega}$ 上为 L-紧，若以下条件满足

(1) $\forall \lambda \in (0,1)$ $Lx = \lambda F(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上无解；

(2) $\forall x \in N(L) \cap \partial\Omega$, $QF(x) \neq 0$；

(3) Brouwer 度 $\deg(JQF|_{N(L)\cap\Omega} N(L) \cap \Omega, 0) \neq 0)$，

则算子方程 $Lx = F(x)$ 在 $D \cap \bar{\Omega}$ 上至少有一个解.

考虑 Duffing 方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t), \tag{2.1}$$

其中 $g(x) \in C(R)$，$p(t) \in C(R)$ 为 2π 周期函数，显然(2.1)的 2π 周期解问题与下面周期边值问题等价

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + f(t,x), \\ &x(0) = x(2\pi), \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $x(t) = (x_1(t)\ x_2(t))^{\mathrm{T}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$f(t,x) = (0, -g(x_1) + p(t))^{\mathrm{T}}$. 记 $X = C_{2\pi} = \{x(t) \in C[0,2\pi],\ x(0) = x(2\pi)\} = Z$ 并赋于最大模范数 $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,2\pi]} |x(t)|$，为了方便还可视 X 为 $L^2[0,2\pi]$ 的子空间，并引入内积 $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x(t)y(t)\mathrm{d}t$. 记 $Lx = \dot{x} - Ax$，则

$$D_L = \{x(t) \in X, \dot{x} \in C_{2\pi}\}, Fx(t) = f(t, x(t)),$$

L 为 Fredholm 算子，具有 ind $L = 0$，且 $F: X \to Z$ 连续，而且算子在 X 的有界集上的 L-紧[4]，注意到 X 的定义，显然(2.2)等价于算子方程

$$Lx = Fx, \quad x \in D_L. \tag{2.3}$$

由于 $\forall x \in N(L) \Leftrightarrow Lx = \dot{x} - Ax = 0, x(0) = x(2\pi)$. 即 $x(t) = (\alpha, 0)^{\mathrm{T}}$，记 $e_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$，则 $N(L) = [e_1]$ 张成的一维空间，$\forall x(t) \in X$

$$Px = (x, e_1)e_1 = (\langle x_1\rangle, 0), \tag{2.4}$$

其中 $\langle x_1\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x_1(t)\mathrm{d}t$.

为了确定 $R(L)$ 以及 Q 由[9]定理 5.1.2$P157$ $\forall y(t) \in R(L)$，即方程

$$Lx = y(t), \quad x \in D(L) \tag{2.5}$$

有解，其充要条件为其共轭方程的任一 2π 周期解 $z(t)$

$$L^* z = \dot{z} + A^* z = 0,$$

有 $(y(t), z(t)) = 0$ 而 $N(L^*) = (0,\alpha)^{\mathrm{T}}$，记 $e_2 = (0.1)$，则 $N(L^*) = [e_2]$，故记 $Qz = (z, e_2) = (0, \langle z_2\rangle)$，且 $R(L) = Q(L)$，令 $J(0,\alpha)^{\mathrm{T}} = (\alpha, 0)^{\mathrm{T}}$，则 $J: R(Q) \to N(L)$ 的线性同胚，$\forall x(t) = (\alpha, 0)^{\mathrm{T}} \in N(L)$，有

$$QFx(t) = (0, -g(\alpha) + \langle p\rangle)^{\mathrm{T}}, \tag{2.6}$$

$$JQFx(t) = (-g(\alpha) + \langle p\rangle, 0)^{\mathrm{T}}. \tag{2.7}$$

众所周知，当 $f: R \to R$ 的连续映射，有

(1) 当 $f(a)f(b) > 0$，$\deg(f, (a,b), 0) = 0$，

(2) 当 $f(a)f(b) < 0$，$\deg(f, (a,b), 0) = \pm 1 \neq 0$.

因此要使定理 A 中条件 3)满足，自然应假设条件

$$(g(x) - \langle p\rangle)(g(-x) - \langle p\rangle) < 0 \quad \text{当 } |x| > K \text{ 时}.$$

3 主要结论

定理 1 设 $g(x) \in C^1(R)$，$p(t)$ 为连续 2π 周期函数，满足条件

(1) $\exists K$ 当 $|x| > K$，有 $(g(x) - \langle p \rangle)(g(-x) - \langle p \rangle) < 0$，

(2) $\exists a \in (0,1)$，使 $g'(x) \leqslant a$，

(3) $g^{-1}(\langle p \rangle)$ 有界，即 $\exists c > 0$，使 $\forall x \in g^{-1}(\langle p \rangle)$ 有 $|x| < c$.

则 Duffing 方程(2.1)有 2π 周期解.

证明 记 $P = (\int_0^{2\pi} p(t)^2 \mathrm{d}t)^{1/2} = \| p \|_{L^2}$，取 $R = \sqrt{2\pi P}/(1-a)$，$r = \max\{K, C+R\}$，$\Omega = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}}, \| x_1(t) \| < r, \| x_2(t) \| < R, x \in X\}$. 由预备知识，显然定理 A 中 2)与 3)是满足的，因此仅需验证定理 A 中的条件 1)便可，即算子方程

$$Lx = \lambda F(x), \quad \forall \lambda \in (0,1), \quad x \in D_L \cap \partial\Omega \tag{3.1}$$

无解. 假设 $\exists \lambda_0 \in (0,1)$，$(x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}} \in \partial\Omega$ 使(3.1)有解.

记 $z = x_1(t)$，则 z 满足方程

$$\begin{cases} \ddot{z} + \lambda_0 g(z) = \lambda_0 p(t), \\ z(0) = z(2\pi),\ \dot{z}(0) = \dot{z}(2\pi). \end{cases} \tag{3.2}$$

(3.2)第一式乘以 $\ddot{z}$ 时 t 在 0 到 2π 上积分得

$$\int_0^{2\pi} \ddot{z}^2 \mathrm{d}t + \lambda_0 \int_0^{2\pi} g(z)\ddot{z}\mathrm{d}t = \lambda_0 \int_0^{2\pi} \ddot{z} p(t) \mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

注意到(3.2)周期边值条件，分部积分得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(z)\ddot{z}\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} g(z)\ddot{z}\mathrm{d}x = \dot{z}g(z)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} g'(z)\dot{z}^2\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{2\pi} g'(z)z'^2\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.4}$$

记 $E^- = \{t\ g'(x(t)) < 0,\ t \in [0,2\pi]\}$，$E^+ = [0,2\pi]\backslash E^-$，(3.3)化为

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \dot{z}^2 \mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{2\pi} \ddot{z}^2 \mathrm{d}t - \lambda_0 \int_{E^-} g'(z)\dot{z}^2 \mathrm{d}t = \lambda_0 \int_{E^+} g'(z)\dot{z}^2\mathrm{d}t + \lambda_0 \int_0^{2\pi} p(t)\ddot{z}\mathrm{d}t \\ &< -\int_0^{2\pi} a\dot{z}^2 \mathrm{d}t + \| p \|_{L^2} \| \ddot{z} \|_{L^2} \leqslant a \int_0^{2\pi} \ddot{z}^2\mathrm{d}t + p \| \ddot{z} \|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5)最后的不等式由 Wirtinger 不等式 $\int_0^{2\pi} \dot{z}^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} \ddot{z}^2 \mathrm{d}t$(因为此时 $\langle \dot{z} \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{z}\mathrm{d}t = z(2\pi) - z(0) = 0$)，故

$$\| \dot{z} \|_{L^3} \leqslant \| \ddot{z} \|_{L^2} < P/(1-a). \tag{3.6}$$

由于 $z(0) = (2\pi)$，故存在 $\tau \in [0,2\pi]$ 使 $\dot{z}(\tau) = 0$，$\forall t \in [0,2\pi]$

$$|\dot{z}(t)| = |\dot{z}(\tau) + \int_\tau^t \ddot{z}(s)\mathrm{d}s| = |\int_\tau^t \ddot{z}(s)\mathrm{d}s|$$

$$= \int_0^{2\pi} |\ddot{z}(s)|\mathrm{d}s \leqslant \sqrt{2\pi}\|\ddot{z}\|_{L^3} < \frac{\sqrt{2\pi}}{1-a}P = R$$

由于连续函数 $[0,2\pi]$ 可达到最大值，故 $\|\dot{z}\| < R$，又对(3.2)中积分并注意到中值定理，$\lambda_0 \in (0,1)$，$\exists \tau_1 \in (0,2\pi)$，

$$g(z(\tau_1)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\mathrm{d}t = \langle p\rangle, \quad t \in [0,2\pi].$$

由条件(3) $|z(\tau_1)| < c$ 故由类似估计

$$|z(t)| = |z(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} \dot{z}\mathrm{d}s| < c + R = r,$$

即 $\|z(t)\| < r$,因此 $x(t) = (x_1(t), x_2(x))^{\mathrm{T}} \in \Omega$ 矛盾.

注 当 $g(x)$ 为周期函数时,A Castro 在条件 $\frac{g(x)-g(y)}{x-y} < 1$ 下,曾给出类似结果[8].

定理 2 设 $g(x) \in C^1(R)$ 满足 $g'(x) \leqslant 0$ 且在任区间上 $g'(x)$ 不恒为零,则 Duffing 方程的(2.1)有唯一 2π 周期解的充分必要条件为 $\langle p\rangle \in g(R)$.

证明 必要性显然,只要(2.1)式积分便得

$$\langle p\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x(t))\mathrm{d}t = g(x(\tau)), \quad 即 \langle p\rangle \in g(R).$$

充分性分两步,先来利用定理1证明存在性.

由于 $g'(x) \leqslant 0$ 且 $g'(x)$ 在任一区间上不恒为零,故 $g(x)$ 严格单调减,因此,∃ 13c 使 $g(c) = \langle p\rangle$, c 仅 g;以及 $\langle p\rangle$ 有关,故定理 1 中的条件 3) 满足,又由于 $\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ 存在(可能 $\alpha = -\infty$), $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$(可能 $\beta = -\infty$), $g(R) = (\beta,\alpha)$,由 $\langle p\rangle \in g(R) = (\beta,\alpha)$ 故存在 $K > 0$ 当 $x > K$ 时有 $(g(-x) - \langle p\rangle)(g(x) - \langle p\rangle) < 0$;故定理 1 为三条均满足,因而证明了存在性.

唯一性,假设 Duffing 方程有两个不同的 2π 周期解 $x(t)$ 与 $\bar{x}(t)$, $x(t) \equiv \bar{x}(t)$, $x(t) \equiv \bar{x}(t)$,则

$$\ddot{x}(t) + g(x(t)) = p(t), \tag{3.7}$$

$$\ddot{\bar{x}}(t) + g(\bar{x}(t)) = p(t). \tag{3.8}$$

记 $z(t) = \bar{x}(t) - x(t)$, $g(\bar{x}(t)) - g(x(t)) = [\int_0^1 g'(x(t) + sz(t))\mathrm{d}s]z(t)$.

其中 $G(t) = \int_0^1 g'(x(t) + sz(t))\mathrm{d}s \leqslant 0$ 为 2π 周期函数(3.7)与(3.8)两式相减得

$$\ddot{z} + G(t)z = 0. \tag{3.9}$$

将(3.9)乘以 $z(t)$ 积分,注意到

$$\int_0^{2\pi} \ddot{z}z\mathrm{d}t = z\dot{z}|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \dot{z}^2\mathrm{d}t,$$

则有

$$\int_0^{2\pi} \dot{z}^2\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} -G(t)z^2\mathrm{d}t = 0.$$

而 $-G(t) \geqslant 0$,故 $\dot{z}^2 \equiv 0$, $-G(t)z^2 = 0$, $t \in [0,2\pi]$,因而 $z = \bar{x}(t) - x(t) \equiv 0$. 即唯一性获证.

例 1 考虑 $\ddot{x} - \mathrm{tg}^{-1}x = a(1-\cos t)$.

$$g(x) = -\mathrm{tg}^{-1}x', g'(x) < 0, \quad g(R) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \langle p\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\mathrm{d}t = a.$$

由定理2,当 $|a| < \frac{\pi}{2}$ 时有唯一 2π 周期解,当 $|a| \geqslant \frac{\pi}{2}$ 时调和解不存在.

何时对 $\forall\, p(t)\in C(R)$ 为 2π 周期函数 Duffing 方程(2.1)有唯一解 2π 周期解，作为定理2中直接推论，我们有

定理3 设 $g(x)\in C^1(R)$，$g'(x)<0$，且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(t)\mp\infty$，则 $\forall\, p(t)\in C(R)$ 为 2π 周期函数 Duffing 有唯一的 2π 周期解.

因为此时 $g(R)=R$ 故 $\forall\, p(t)\in C(R)$ 为 2π 周期解有 $\langle p\rangle\in g(R)$.

注 值得注意的是 G Morries C. A. Marvey 丁伟岳对某类强非线情形，即当 $g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$ 为强非线性时，有无穷多个 2π 周期[5]，[7]，而对于 $g'(x)<0$ 时，满足强非线性条件，$\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{x}\right|=+\infty$ 时调和解却是唯一的，例如 Duffing 方程

$$\ddot{x}-x^3=\sin t. \tag{3.11}$$

由定理3知(3.10)有唯一的调和解，从定性结构来看，为什么在这两类强非线性条件下，方程解的性态有如此巨大的差异?其原因之一是当 $p(t)\equiv 0$. 原方程 $\ddot{x}+g(x)=0$ 具有唯一的平衡点 $(0,0)$.

当 $g'(x)>0$ 时，此平衡点 $(0,0)$ 就是方程的中心；

当 $g'(x)<0$ 时，此平衡点 $(0,0)$ 就是方程的鞍点.

因此相应于这两种奇点情况下的系统的全局定性点结构之间，存在着巨大的差异，根据平面定性理论知，在参数平面上，对应于奇点是中心的系统的轨线性态是十分脆弱和易变的，而相应于奇点是鞍点的系统的. 轨线性性是较稳定和不易变化的. 故原系统 $\ddot{x}+g(x)=0$ 在通过周期扰动后，此时 $\ddot{x}+g(x)=p(t)$ 系统轨线性态有上述两类非线性情况下的巨大差异，也就很自然的易于理解了.

推论 若 $g(x)\in C^1(R)$，$g'(x)<a<0$，则 $\forall\, p(t)\in C(R)$ 为 2π 周期函数，则系统(2.1)有唯一的 2π 周期解.

因为此时 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\mp\infty$.

注 R Ressing 在[2]曾利用压缩映射的方法给出当 $p<g'(x)<q<0$ 时，故推论可视为 Reissing 结论的推广.

参考文献：

[1] LOUD W S. *Periodic solutions of nonlinear differential equations of Duffing type* [J]. In: Poc. United States-Janpan Seminar on differential and Functional Equations, Benjamin, New York, 1967, 199-224.

[2] REISSING R, SANSONE G, CONTI R. *Non-linear Differential Equations of High Order* [M]. Noordhoff, Leyden, 1974.

[3] MAWHIN J. *Recent trends in nonlinear boundary value problems* [J]. In: VII intern. Konferenz uber nichtlineare Schwingungen (Berlin 1975), Band I, 2, abhandlungen der AdW, Akademie verlag, Berlin, 1977, 51-70.

[4] MAWHIN J. *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems CBMS* 40 [J]. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[5] CAPIETTO A, MAWHIN J, ZANOLIN F. *A continuation approach to superlinearperiodic boundary*

value problems [J]. J. Differential Equations, 1990, **88**: 347-395.

[6] DING T. *Nonlinear oscillations at a point of resonance* [J]. Scientia Sinica, Ser. A, 1982, 918—931.

[7] DING T. *An infinite class of periodic solutions of periodically perturbed Duffing equation at resonance* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1982, **86**: 47—54.

[8] A Castro Periodic solutions of the forced pendulum equation differential equation Editors S. Ahmad, M Keener and A.C. Lazer Academic Press, 1980, 149—160.

[9] 李正元，钱 敏. 向量场的旋转度论及其应用 [M]. 北京:北京大学出版社，1982.
LI Zheng-yuan, QIAN min. *Degree of Vector Fields and Its Application* [M]. Beijing: Peking University Press, 1982. (in Chinese)

On the Existence and Uniqueness of Periodic Solution of Duffing's Equation

CHEN Hong-bin, YU Lie, YUAN Xiao-yang

(Xi'an Jiaotong University, Shaanxi 710049, China)

Abstract: Consider the Duffing's equation

$$\ddot{x} + g(x) = p(t)$$

where $g \in C^1(R)$ and $p(t) \in C(R)$ is a 2π- periodic, with $g(x)$ statisfying condition $g'(x) < 0$, the necessary and sufficient conditions to ensure the existence and uniqueness of 2π- periodic solution of Duffing equation are obtained by means of coincidence degree.

Key words: Duffing's equation; Periodic solution; Coincidence degree.