第22卷第4期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

具分布偏差变元的中立型微分方程的全局渐近稳定性*

侯成敏， 何延生
(延边大学师范学院数学系，吉林 延吉 133022)

摘　要：本文考虑具分布偏差变元的微分方程

$$[x(t)-Cx(t-r)]'+f(t,\int_{-\tau}^{0}x(t+s)\mathrm{d}u(s))=0,t\geqslant t_0,\qquad(1)$$

其中 $C,r,\tau\in R^{+}$ 且 $0\leqslant C<1,f(t,x)\in C([t_0,\infty],R),xf(t,x)>0,x\neq 0$. 通过对方程(1)的非振动解及振动解的渐近性的讨论，获得了方程(1)的全局渐近稳定的充分条件.

关键词：全局渐近稳定性；分布偏差变元；中立型.
分类号：AMS(2000) 34K15/CLC O175.12
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2002)04-0631-08

1 引　言

由于泛函微分方程的稳定性在理论和实际应用两方面都具有很重要的意义，因此近年来出现了许多研究成果[1-3]，但是大多数结果都限于非中立型方程的研究，对于中立型方程讨论的文章较少[4,5]，这主要是因为中立型方程解的性态较为复杂，很难得到较好的结果. 本文讨论下列具分布偏差变元的微分方程

$$[x(t)-Cx(t-r)]'+f(t,\int_{-\tau}^{0}x(t+s)\mathrm{d}u(s))=0,t\geqslant t_0\qquad(1)$$

零解的渐近稳定性，得到了判别准则.

2 基本命题及证明

命题1[6]　设 $x(t),z(t)\in C([t_0,\infty],R)$,

$$z(t)=x(t)-Cx(t-r),$$

其中 $0\leqslant C<1,r>0$ 为常数，若 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=M$ 存在($|M|<+\infty$)，则 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ 存在且等于 $M/(1-C)$.

* 收稿日期：2000-01-04；修订日期：2002-09-06
作者简介：侯成敏(1963-)，女，吉林延吉人，副教授.

命题2 设$x(t),z(t)$同命题1，若$x(t)$振动且$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\neq 0$，则必有$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)\neq 0$，且$z(t)$或者振动，或者存在点列$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$使得$\lim\limits_{k\to\infty}z(t_k)=0$.

证明 由命题1显然有$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)\neq 0$，假设$z(t)$非振动，不失一般性设$z(t)>0,t\geqslant t_0$. 因$x(t)$振动故存在点列$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$使得$x(a_k)=0,k=1,2,\cdots$. 若$x(t)\geqslant 0$，则

$$z(a_k)=-Cx(a_k-r)\leqslant 0$$

与$z(t)>0$矛盾；若$x(t)\leqslant 0$，则

$$z(a_k+r)=x(a_k+r)\leqslant 0,$$

同样矛盾. 因此存在区间序列$\{[a_{2n-1},a_{2n}]\}$和$\{[a_{2n},a_{2n+1}]\}$使得

$$x(a_{2n-1})=x(a_{2n})=0,x(t)\geqslant 0,$$

$t\in[a_{2n-1},a_{2n}]$；$x(t)\leqslant 0,t\in[a_{2n},a_{2n+1}]$且存在点列$\{c_n\}$和$\{d_n\}$，使得

$$\dot{x}(c_n)=\dot{x}(d_n)=0,$$

其中$x(c_n)=\max\limits_{a_{2n-1}\leqslant s\leqslant a_{2n}}x(s)$；$x(d_n)=\min\limits_{a_{2n}\leqslant s\leqslant a_{2n+1}}x(s)$. 若在点列$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$中存在相邻的两点$a_k,a_{k+1}$使得$a_{k+1}-a_k\geqslant r$，由$z(a_k+r)=x(a_k+r)>0$知

$$x(t)>0,t\in(a_k,a_{k+1}),$$

但由

$$z(a_{k+1})=-Cx(a_{k+1}-r)$$

有

$$x(a_{k+1}-r)<0$$

矛盾，因此$x(t)$的振动区间均小于r. 以下证明$\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$中存在子列$\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得$\lim\limits_{k\to\infty}z(d_{n_k})=0$.

由$z(t)>0$有$x(t)>Cx(t-r)$. 对任意$t\in[a_{2n-1},a_{2n}]$有$x(t+r)>0$，因此存在某自然数p使得$t+r\in(a_{2(n+p)-1},a_{2(n+p)})$，于是对任意$t\in(a_{2(n+p)},a_{2(n+p)+1})$有

$$0\geqslant x(t)>x(t-r).$$

因$x(d_{n+(k-1)p})\leqslant 0,0\leqslant C<1$，于是更有

$$0\geqslant x(d_{n+kp})\geqslant Cx(d_{n+kp}-r)\geqslant Cx(d_{n+(k-1)p})>x(d_{n+(k-1)p}),n=1,2,\cdots,p-1$$

（其中$d_{n+kp}\in(a_{2(n+p)},a_{2(n+p)+1})$，$\{d_{n+kp}\}$是$\{d_n\}$的子列）即$\{d_{n+kp}\}$单调递增有上界，所以存在极限，令$\lim\limits_{k\to\infty}x(d_{n+kp})=l$，则必有$l=0$，否则$l<0$. 由

$$z(d_{n+kp})-Cx(d_{n+kp}-r)<x(d_{n+kp})-Cx(d_{n+(k-1)p})$$

有

$$\lim_{k\to\infty}z(d_{n+kp})\leqslant(1-C)l<0,$$

矛盾，于是$\lim\limits_{k\to\infty}z(d_{n+kp})=0$. 命题2证毕.

命题3 在命题2的假设下，若$z(t)$非振动，则$z'(t)$必振动且存在区间序列$\{[e_{2n-1},e_{2n}]\}$和$\{[e_{2n},e_{2n+1}]\}$，$n=1,2,\cdots$，使得

$$z'(e_{2n-1})=z'(e_{2n})=0,z'(t)\geqslant 0,t\in[e_{2n-1},e_{2n}];z'(t)\leqslant 0,t\in[e_{2n},e_{2n+1}].$$

证明 假设结论不成立. 1) 若$z'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_0$则$z(t)$单调递增，令$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=l$，则$-\infty<1\leqslant+\infty$；若$-\infty<1<+\infty$，由命题1知它与$x(t)$振动及$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\neq 0$的假设矛盾. 若$l$

$=+\infty$,则与命题 2 矛盾,因此 $z'(t)$ 必振动.

2) 若 $z(t)\leqslant 0, t\geqslant t_0$,则 $z(t)$ 单调递减,令 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=l$,则 $-\infty\leqslant 1<+\infty$;若 $-\infty<1<+\infty$,由命题 1 知它与 $x(t)$ 振动及 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\neq 0$ 的假设矛盾. 若 $l=-\infty$ 则与命题 2 矛盾. 至此命题 3 证毕.

3 主要结果及证明

考虑方程(1) 作如下假设

(D_1) $xf(t,x)>0,(x\neq 0)$,$f(t,x)$ 关于 t 连续,关于 x 是 Lipschitz 连续的;

(D_2) 对于任意 $t\geqslant 0$,$f(t,x)$ 关于 t 单调递增;

(D_3) $u(s)$ 在 $s\in[-\tau,0]$ 上单调非减且满足 $u(0)-u(-\tau)=1$;

(D_4) 存在$[0,\infty]$上的非负连续函数 $b(t)$,对任意的 t 和 x,当 $x\neq 0$ 时有

$$|f(t,x)/x|\leqslant b(t).$$

定理 1 若$(D_1)-(D_4)$ 成立,且

(D_5) 存在非负连续函数 $l(t)$ 使得 $\int^t t_0 l(s)\mathrm{d}s=\infty$ 且 $x\neq 0$ 时有 $|f(t,x)/x|>l(t)$;

(D_6) $\limsup\limits_{t\to\infty}\int_{-\sigma}^{t}b(s)\mathrm{d}s+C=\mu<\dfrac{3-C+C^2-C^3}{2(1+2C-C^2)}$ 且常数 C 满足

$$\frac{3-C+C^2-C^3}{2(1+2C-C^2)}>1,\sigma=\max\{r,\tau\},$$

则方程 (1) 的解满足$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.

定理 1 的证明分为下面四个引理来完成

引理 1 设 $(D_1)-(D_4)$ 成立,$x(t)$ 是方程(1) 的非振动解,则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ 存在且有限.

证明 不妨设 $x(t)$ 最终非负,令

$$z(t)=x(t)-Cx(t-r), \tag{2}$$

则由(1) 不难证明 $z(t)$ 最终非负且 $z'(t)\leqslant 0$,从而$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)$ 存在且有限,再利用命题 1 知$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ 存在且有限. 引理 1 证毕.

引理 2 设$(D_1)-(D_5)$ 成立,则方程(1) 的非振动解当 $t\to\infty$ 时趋于零.

证明 不失一般性,设 $x(t)$ 最终非负,由方程(1) 及(2) 易知最终有 $z'(t)\leqslant 0, z(t)>0$.

假设$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=a\neq 0$,则存在充分大的 $T>t_0+\sigma$ 使得 $x(t)>a/2, t\geqslant T$. 从而由方程(1) 有

$$z'(t)=f(t,\int_{-\tau}^{0}x(t+s)\mathrm{d}u(s))\leqslant -f(t,\frac{1}{2}a)\leqslant -\frac{1}{2}al(t),t\geqslant T+\sigma.$$

对上式两边积分并利用条件(D_5) 得 $z(t)\to-\infty(t\to\infty)$,矛盾. 引理 2 证毕.

引理 3 设$(D_1)-(D_4)$ (D_6) 成立,则方程(1) 的振动解必有界.

证明 设 $x(t)$ 为方程(1) 振动解,若$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$ 则显然有界,若$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\neq 0$ 假设,$x(t)$ 无界,作变换(2),类似文[4] 中定理 2 的证明可选择 $\bar{t}_0>t_0+\sigma$ 使得

$$\max_{\bar{t}_0\leqslant s\leqslant t}|z(s)|\geqslant(1-C)\max_{\bar{t}_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)|>0, \tag{3}$$

所以 $z(t)$ 无界. 令 $\varepsilon>0$,使得 $1<\varepsilon+\mu<\dfrac{3-C+C^2-C^3}{2(1+2C-C^2)}$,再令 $T\geqslant\bar{t}_0>t_0+\sigma$ 使得

$$\int_{-\sigma}^{t}b(s)\mathrm{d}s+C\leqslant\mu+\varepsilon,t\geqslant T. \tag{4}$$

据命题 2 和命题 3 知,存在 $t^*\geqslant T+\sigma$,使得

$$|z(t)|\leqslant|z(t^*)|,\bar{t}_0\leqslant t\leqslant t^*,$$

且 $z'(t^*)=0$. 不失一般性,设 $z(t^*)>0$. 由(1) 得

$$f(t^*,\int_{-r}^{0}x(t^*+s)\mathrm{d}u(s))=0. \tag{5}$$

由(5) 易知,存在 $t_1\in[t^*-\tau,t^*]$. 使得 $x(t_1)=0$,再由(D_4),(3) 和(1) 有,

$$z'(t)=-f(t,\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}u(s))\leqslant\frac{b(t)}{1-C}z(t^*),t\leqslant t^*. \tag{6}$$

以下分两种情况讨论.

1) $z(t)>0,t\in[t_1,t^*]$. 对 $\bar{t}_0\leqslant s\leqslant t_1$ 将(6) 从 s 到 t_1 积分得

$$-z(s)\leqslant\frac{z(t^*)}{1-C}\int_{s}^{t_1}b(s)\mathrm{d}s,\quad s\leqslant t_1, \tag{7}$$

进而有

$$-x(s)\leqslant\frac{z(t^*)}{1-C}(\int_{s}^{t_1}b(s)\mathrm{d}s+C),\quad s\leqslant t_1. \tag{8}$$

另一方面,对 $t_1\leqslant t\leqslant t^*$,利用(7),(8)由(1)得

$$\begin{aligned}z'(t)&=-f(t,\int_{t-r}^{t}(z(\theta)+Cx(\theta-r))\mathrm{d}u(\theta-t))\\&\leqslant-f(t,\int_{t-r}^{t_1}z(\theta)\mathrm{d}u(\theta-t)+C\int_{t-r-r}^{t-r}x(\theta)\mathrm{d}u(\theta-t+r))\\&\leqslant-f(t,-\frac{z(t^*)}{1-C}\int_{t-r}^{t_1}\int_{t-r}^{t_1}b(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u(\theta-t)-\\&\quad\frac{Cz(t^*)}{1-C}\int_{t-r-r}^{t-r}(\int_{\theta}^{t_1}b(s)\mathrm{d}s+C)\mathrm{d}u(\theta-t+r))\\&\leqslant\frac{z(t^*)}{1-C}b(t)[\int_{t-r}^{t_1}b(s)\mathrm{d}s+C\int_{t-r-r}^{t-r}b(s)\mathrm{d}s+C^2].\end{aligned}$$

结合(6)对 $t_1\leqslant t\leqslant t^*$ 有

$$z'(t)\leqslant\min\{\frac{b(t)}{1-C}z(t^*),\frac{z(t^*)}{1-C}b(t)[\int_{t-r}^{t_1}b(s)\mathrm{d}s+C\int_{t-r-r}^{t-r}b(s)\mathrm{d}s+C^2]\}. \tag{9}$$

以下分两种情况讨论:

1.1) $\int_{t_1}^{t^*}b(s)\mathrm{d}s+C\leqslant1$, 利用(9)积分得

$$\begin{aligned}z(t^*)&\leqslant\frac{z(t^*)}{1-C}\int_{t_1}^{t^*}b(t)[\int_{t-r}^{t_1}b(s)\mathrm{d}s+C\int_{t-r-r}^{t-r}b(s)\mathrm{d}s+C^2]\mathrm{d}t-Cx(t_1-r)\\&\leqslant\frac{z(t^*)}{1-C}\int_{t_1}^{t^*}b(t)[\int_{t-r}^{t}b(s)\mathrm{d}s-\int_{t_1}^{t}b(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t+\frac{C}{1-C}z(t^*)\int_{t_1}^{t^*}b(t)\end{aligned}$$

$$\int_{t-\tau-r}^{t-r} b(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{Cz(t^*)}{1-C}\int_{t_1}^{t^*} b(t)[\int_{t-r}^{t} b(s)\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t} b(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t +$$

$$\frac{C^2}{1-C}z(t^*)\int_{t_1}^{t^*} b(s)\mathrm{d}s + \frac{C}{1-C}z(t^*)(\int_{t_1-r}^{t_1} b(s)\mathrm{d}s + C).$$

上式对 $t_1 \leqslant t \leqslant t^*$ 成立，特别当 $t=t^*$ 有

$$z(t^*) \leqslant \frac{z(t^*)}{1-C}\{(\mu+\varepsilon-C)\int_{t_1}^{t^*} b(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}[\int_{t_1}^{t^*} b(s)\mathrm{d}s]^2\} +$$

$$\frac{C}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon-C)(1-C) + \frac{Cz(t^*)}{1-C}\{(\mu+\varepsilon-C)\int_{t_1}^{t^*} b(t)\mathrm{d}t -$$

$$\frac{1}{2}[\int_{t_1}^{t^*} b(s)ds]^2\} + \frac{C^2}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon-C) + \frac{C}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon)$$

$$\leqslant \frac{(1+C)z(t^*)}{1-C}\{(1-C)(\mu+\varepsilon-C) - \frac{1}{2}(1-C)^2\} +$$

$$\frac{C}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon-C) + \frac{C}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon)$$

$$= z(t^*)[\frac{1+2C-C^2}{1-C}(\mu+\varepsilon) - (C + \frac{C^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{C^2}{1-C})] < z(t^*),$$

矛盾！

1.2) $\int_{t_1}^{t^*} b(s)\mathrm{d}s + C > 1$，则存在 $\bar{t} \in (t_1, t^*)$ 使 $\int_{\bar{t}}^{t^*} b(s)\mathrm{d}s + C = 1$. 由(9)式积分得

$$z(t^*) \leqslant \int_{t_1}^{\bar{t}} \frac{z(t^*)}{1-C} b(t)\mathrm{d}t + \int_{\bar{t}}^{t^*} \frac{z(t^*)}{1-C} b(t)(\int_{t-r}^{t_1} b(s)\mathrm{d}s +$$

$$C\int_{t-\tau-r}^{t_1} b(s)\mathrm{d}s + C^2)\mathrm{d}t - Cx(t_1 - r)$$

$$\leqslant \frac{z(t^*)}{1-C}(\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)\mathrm{d}t + C)(\int_{t_1}^{\bar{t}} b(t)\mathrm{d}t) + \frac{z(t^*)}{1-C}\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)\int_{t-r}^{t_1} b(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t +$$

$$\frac{Cz(t^*)}{1-C}\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)\int_{t-\tau-r}^{t_1} b(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{C^2 z(t^*)}{1-C}\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)\mathrm{d}t + \frac{z(t^*)}{1-C}(\int_{t_1-r}^{t_1} b(s)\mathrm{d}s + C)$$

$$= \frac{z(t^*)}{1-C}\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)(\int_{t-r}^{t} b(s)\mathrm{d}s - \int_{\bar{t}}^{t} b(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t +$$

$$\frac{C}{1-C}z(t^*)\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)\int_{t-\tau-r}^{t-\tau} b(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{Cz(t^*)}{1-C}\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)(\int_{t-\tau}^{t} b(s)\mathrm{d}s - \int_{\bar{t}}^{t} b(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}t +$$

$$\frac{C}{1-C}z(t^*)(\int_{t_1-r}^{t_1} b(t)\mathrm{d}t + C) + \frac{C^2}{1-C}z(t^*)\int_{\bar{t}}^{t^*} b(t)\mathrm{d}t;$$

$$z(t^*) \leqslant \frac{z(t^*)}{1-C}(1+C)\int_{\bar{t}}^{t^*} (\mu+\varepsilon-C)b(t)\mathrm{d}t -$$

$$\frac{1}{2}[\int_{\bar{t}}^{t^*} b(s)\mathrm{d}s]^2 + \frac{C}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon-C)(1-C) +$$

$$\frac{C}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon) + \frac{C^2}{1-C}z(t^*)(\mu+\varepsilon-C)$$

$$=z(t^*)[\frac{1+2C-C^2}{1-C}(\mu+\varepsilon)-(C+\frac{C^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{C^2}{1-C})]<z(t^*),$$

矛盾!

2) 若存在 $t_2\in[t_1,t^*]$，使 $z(t_2)=0$，$t\in(t_2,t^*)$ 时，$z(t)>0$. 不妨将 t_2 仍记为 t_1，即 $z(t_1)=0$，$t\in(t_1,t^*)$ 时，$z(t)>0$.

2) 的证明过程只须注意到 $z(t_1)=0$ 即可，故从略. 引理 3 证毕.

引理 4 $(D_1)-(D_4)$，(D_6) 成立，则方程(1) 的振动解当 $t\to\infty$ 时趋于零.

证明 设 $x(t)$ 是方程(1) 的一个振动解，反设 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\neq 0$，由引理 3 知 $x(t)$ 有界，从而 $z(t)$ 也有界. 令

$$\alpha=\limsup_{t\to\infty}z(t);\quad \beta=\liminf_{t\to\infty}z(t);$$
$$\alpha_1=\limsup_{t\to\infty}x(t);\quad \beta_1=\liminf_{t\to\infty}x(t).$$

根据确界的性质有

$$\alpha\geqslant(1-C)\alpha_1, \tag{10}$$
$$\beta\leqslant(1-C)\beta_1. \tag{11}$$

因 $x(t)$ 振动，所以 $-\infty<\beta_1\leqslant 0\leqslant\alpha_1<\infty$. 以下往证 $\alpha=\beta=0$. 分三种情况讨论：

1) $z(t)$ 振动且存在区间序列 $\{[a_{2n-1},a_{2n}]\}$，$\{[a_{2n},a_{2n+1}]\}$，使 $z(t)\geqslant 0$，$t\in[a_{2n-1},a_{2n}]$；$z(t)\leqslant 0$，$t\in[a_{2n},a_{2n+1}]$. 对任意的 $\eta>0$，存在 $T>t_0+\sigma$ 使得

$$-\beta_2=\beta_1-\eta<x(t)<\alpha_1+\eta=\alpha_2,t\geqslant T.$$

从而由方程(1)有

$$z'(t)\leqslant b(t)\beta_2,t\geqslant T, \tag{12}$$
$$z'(t)\geqslant -b(t)\alpha_2,t\geqslant T. \tag{13}$$

A) 选 $\{t_m\}$ 是单调递增的无穷数列，且 $t_m>T+\sigma$，$z(t_m)>0$，当 $m\to\infty$ 时，$z(t_m)\to\alpha$ 和 $z'(t_m)=0$. 由方程(1) 有，$f(t_m,\int_{-\tau}^{0}x(t_m+s)\mathrm{d}u(s))=0$，则存在 $\xi_m\in[t_m-\tau,t_m]$ 使

$$x(\xi_m)=0.$$

A. 1) $z(t)>0$，$t\in[\xi_m,t_m]$，对 $T<s<\xi_m$ 由(12) 有

$$-z(s)\leqslant\beta_2\int_s^{\xi_m}b(t)\mathrm{d}t. \tag{14}$$

进而有

$$-x(s)\leqslant\beta_2(\int_s^{\xi_m}b(t)\mathrm{d}t+C), \tag{15}$$

从而对 $t\in[\xi_m,t_m]$ 有

$$z'(t)=-f(t,\int_{-\tau}^{0}x(t+s)\mathrm{d}u(s))\leqslant\beta_2b(t)[\int_{t-\tau}^{\xi_m}b(s)\mathrm{d}s+C\int_{t-\tau-r}^{\xi_m}b(s)\mathrm{d}s+C^2],$$

因此对 $t\in[\xi_m,t_m]$ 有

$$z'(t)\leqslant\min\{\beta_2b(t),\beta_2b(t)[\int_{t-\tau}^{\xi_m}b(s)\mathrm{d}s+C\int_{t-\tau-r}^{\xi_m}b(s)\mathrm{d}s+C^2]. \tag{16}$$

以下分两种情况讨论：

A. 1. 1) $\int_{\xi_m}^{t_m} b(s)\mathrm{d}s + C \leqslant 1$,类似引理 3 的证明 1) 中 1. 1) 有

$$z(t_m) \leqslant \beta_2(1-C)\Big[\frac{1+2C-C^2}{1-C}(\mu+\varepsilon) - \Big(C + \frac{C^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{C^2}{1-C}\Big)\Big]; \tag{17}$$

A. 1. 2) $\int_{\xi_m}^{t_m} b(s)\mathrm{d}s + C > 1$,选择 $\eta_m \in [\xi_m, t_m]$,使得 $\int_{\eta_m}^{t_m} b(s) + C = 1$.

类似引理 3 的证明 1) 中 1. 2) 仍有(17) 成立.

在(17) 中令 $m \to \infty$ 得

$$\alpha \leqslant \beta_2(1-C)\Big[\frac{1+2C-C^2}{1-C}(\mu+\varepsilon) - \Big(C + \frac{C^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{C^2}{1-C}\Big)\Big].$$

再利用(11) 及 $\Big[\frac{1+2C-C^2}{1-C}(\mu+\varepsilon) - \Big(C + \frac{C^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{C^2}{1-C}\Big)\Big] < 1$ 可得

$$\alpha \leqslant -\beta. \tag{18}$$

A. 2) 若存在 ξ_m 使 $z(\xi_m) = 0, z(t) > 0, t \in (\xi_m, t_m)$ 不妨记 ξ_m 仍为 ξ_m,即 $z(\xi_m) = 0, t \in (\xi_m, t_m)$ 时 $z(t) > 0$. 余下的证明可重复 1) 的步骤得(18) 成立.

B) 同样地,选择单调递增无穷数列 $\{S_m\}, S_m > T + \sigma, z(S_m) < 0, z'(S_m) = 0, z(S_m) \to \beta$ $(m \to \infty)$ 重复以上步聚并利用(10) 得

$$\beta \geqslant -\alpha. \tag{19}$$

结合(18) 得 $\alpha = \beta = 0$ 从而 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

2) $z(t)$ 振动, $z(t) \geqslant 0$(或 $z(t) \leqslant 0$). 此时 $\beta = 0$.

重复 1) 中的 A) 有 $0 \leqslant \alpha \leqslant -\beta = 0$,即 $\alpha = \beta = 0$,从而 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

3) $z(t)$ 非振动. 不失一般性设 $z(t) > 0, t \geqslant t_0$. 根据命题 2 知, $\beta = 0$. 重复 1) 中的 A) 有 $0 \leqslant \alpha \leqslant -\beta = 0$,即 $\alpha = \beta = 0$. 从而 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. 引理 4 证毕.

推论 1 对线性方程

$$[x(t) - Cx(t-r)]' + bx(t-\tau) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{20}$$

其中 $0 \leqslant C < 1, \frac{3-C-C^2-C^3}{2(1+2C-C^2)} > 1, b > 0, r, \tau > 0$. 若

$$b\sigma + C < \frac{3-C-C^2-C^3}{2(1+2C-C^2)}, \sigma = \max\{r, \tau\},$$

则方程(20) 的零解是全局渐近稳定的.

注 当 $c = 0$ 时本文的定理 1 即是文[1] 中的定理 1,因此本文的结果推广了文[1] 的主要结果.

参考文献:

[1] 罗交晚,庾建设. 具分布偏差变元非自治数学生态方程的全局渐近稳定性 [J]. 数学学报, 1998, **41** (6): 1273—1282.

LUO Jiao-wan, YU Jian-she. *Global asymptotic stability of nonautonomous mathematical ecological equations with distributed deviating arguments* [J]. Acta. Math. Sinica, 1998, **41**(6): 1273—1282. (in Chinese)

[2] JOSEPH W H, YU Jian-she. *Global attractivity and uniformly persistence in Nichson's blowflies* [J]. Differential Equations and Dynamics System, 1994, **2**(1): 11—18.

[3] 伍炯宇. 二阶泛函微分方程的振动性和非振动性 [J]. 数学年刊(A辑), 1991, **12**(3): 302—308.
WU Jiong-yu. *Oscillations and nonoscillations of second order functional differential equations* [J]. Chinese Annals of Math., Ser. A, 1999, **12**(3): 302—308. (in Chinese)
[4] 李龙图. 一阶线性中立型微分方程解的稳定性 [J]. 应用数学, 1992, **5**(2): 59—63.
LI Long-tu. *Stability of solutions of first order linear neutral type differential equations* [J]. Math. Appl., 1992, **5**(2): 59—63. (in Chinese)
[5] 高国柱. 线性非自治中立型泛函微分方程的稳定性 [J]. 数学学报, 1993, **36**(4): 549—554.
GAO Guo-zhu. *Stability of linear nonautonomous neutral type functional differential equations* [J]. Acta. Math. Sinica, 1993, **36**(4): 549—554. (in Chinese)
[6] 王其如. 具有变号系数和多偏差的一阶中立型微分方程解的稳定性 [J]. 烟台师范学院学报, 1993, **3**: 34—37.
WANG Qi-ru. *Stability of solutions of first order neutral type differential equations with oscillatory coefficients and many distributed deviating arguments* [J]. Journal of Yantai Teachers' College, 1993, **3**: 34—37. (in Chinese)

Global Asymptotic Stability of Neutral Differential Equation with Distributed Deviating Arguments

HOU Cheng-min, HE Yan-sheng
(Dept. of Math., Teachers' College of Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: In this paper, We consider the differential equation with distributed deviating arguments

$$[x(t) - Cx(t-r)]' + f(t, \int_{-\tau}^{0} x(t+s)\mathrm{d}u(s)) = 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{1}$$

Where $C, r, \tau \in R^+$ and $0 \leqslant C < 1, f(t,x) \in C([t_0,\infty], R), xf(t,x) > 0, x \neq 0$. Sufficient conditions for the global asymptotic stability of the zero solution of (1) are obtained by investigating the asymptotic behaviors of the nonoscillatory solutions of (1) and then of the oscillatory solutions.

Key words: global asymptotic stability; distributed deviating argument; neutral.