环的代数封闭性*

郭 时 光
(四川轻化工学院, 四川 自贡 643033)

摘 要:证明了任一环有代数封闭的扩张环,且实封闭域上的四元数体是代数封闭的,给出了代数封闭环的若干性质.

关键词:零点; 分裂环; 代数封闭; 未定元; 特征值.
分类号:AMS(2000) 16S/CLC O153.3
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2002)04-0639-08

1 前 言

所谓域是代数封闭的,就是说此域上每一个次数不小于1的多项式在此域中至少有一个零点. 早在1629年,A. Girard曾猜到复数域是代数封闭的[1]. 但直到1746年以后,这一猜想才由D'Alembert,Gauss和Liouville等人先后用各自的方式加以证实[2]. 1911年,E. Steinitz指出,每一个域都有代数封闭的扩张域[3]. 1926年,E. Artin等人又阐述了域的实封闭性[4],进一步丰富了域的代数封闭性理论. 然而,代数封闭性却一直未能推广到非结合非交换有零因子环的研究中.

为了作出这一推广,本文首先扩充了代数封闭的定义. 在此基础上,证明了任一环有代数封闭的扩张环,给出了代数封闭环的若干性质,证明了实封闭域上的四元数体是代数封闭的.

2 基本认识

本文所说的"环",在非特别申明时可以是非结合环. 设 A 是有单位元 e 的环,用 $\widetilde{A}$ 表示环 A 上每一行及每一列都至多有有限个非零元素的 $\infty\times\infty$ 矩阵全体依通常定义的矩阵乘法和模运算构成的环或 A 上的双模. 记

$$I=\begin{bmatrix} e & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix} 0 & e & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots \end{bmatrix},\ S^0=I,$$

$$A[S]=\{\varphi=\sum a_pS^p\,|\,a_p\in A,\text{至多有限个 } a_p\neq 0\},$$

* 收稿日期:1999-06-15
作者简介:郭时光(1955-),男,副教授.

$$A[I]=\{\varphi=aI \mid a\in A\}.$$

设 B 是 A 的扩张环，且 B 以 e 为单元.

定义 1 称 $A[S]$ 中元是 A 上的多项式. 设 $\varphi=\sum a_pS^p\in A[S]$，称 n 是 φ 的次数，称 a_n 是 φ 的首元，如果 $a_n\neq 0$ 且 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$. 称 φ 是首 1 的，如果 φ 的首元是 e.

定义 2 设 $\varphi=\sum\limits_{0\leqslant p\leqslant n}a_pS^p\in A[S]$，$b\in B$.

$$\varphi(b)\stackrel{\triangle}{=}a_0+a_1b+(a_2b)b+\cdots+(\cdots((a_nb)b)\cdots)b. \tag{1}$$

$$\varphi^T(b)\stackrel{\triangle}{=}a_0+ba_1+b(ba_2)+\cdots+b(\cdots(b(ba_n))\cdots). \tag{2}$$

$$A[b]\stackrel{\triangle}{=}\{\varphi(b)\mid\varphi\in A[S]\},A^T[b]\stackrel{\triangle}{=}\{\varphi^T(b)\mid\varphi\in A[S]\}.$$

称 $A[b]$（$A^T[b]$）中元是 A 上的 b 右（左）多项式.

定义 3 设 $b\in B$，$\varphi\in A[S]$. 称 b 是 φ 的右（左）零点，称 φ 是 b 的左（右）零化多项式，如果 $\varphi(b)=0$（$\varphi^T(b)=0$）；称 b 是 A 上的右（左）零点，如果 b 是 A 上首 1 多项式的右（左）零点；称 b 是 A 上的 n 次右（左）零点，如果 b 在 A 上的左（右）首 1 零化多项式的次数最小者是 n.

定义 4 称环 B 是环 A 的分裂环，如果 A 上每个次数不小于 1 的首 1 多项式都有在 B 中的右零点.

定义 5 称环 A 是代数封闭的，如果环 A 是自身的分裂环.

定义 6 称 $x\in B$ 是 A 上的未定元，如果对 $A[S]$ 中任一非零元 φ，都有 $\varphi(x)\neq 0$ 且 $\varphi^T(x)\neq 0$.

定义 7 称 $d\in B$ 是 A 上的交换元，如果 $\forall a\in(d)$（(d) 表示 d 生成的子环），$\forall b\in A\cup(d)$，有 $ab=ba$.

定义 8 称 $d\in B$ 是 A 上的结合元，如果 $\forall a\in(d)$ 及 $b,c\in A\cup(d)$，下三式同时成立：

$$(ab)c=a(bc),\ (ba)c=b(ac),\ (bc)a=b(ca).$$

定义 9 称 $d\in B$ 是 A 上的中心元，如果 d 是 A 上的交换元且是 A 上的结合元.

定义 10 设 $b\in B$，$a\in A$. 称 a 是 b 在 A 内的右（左）特征值，如果 B 中有元 $c\neq 0$，使 $bc=ca$（$cb=ac$）.

3 环的代数封闭扩张

定理 1 任一环 A 可以嵌人一个有单位元的非零环 B.

证明 设 N 是整数环. 整数与 A 中元 a 的结合法规定作

$$0\cdot a=0\text{（右端 0 是 }A\text{ 中零元）},1\cdot a=a,$$

$$(1+n)\cdot a=1\cdot a+n\cdot a,(-n)\cdot a=n\cdot(-a)=(-a)\cdot n;$$

在集 $A\times N=\{(a,n)\mid a\in A,n\in N\}$ 上规定

相等 $(a_1,n_1)=(a_2,n_2)\Leftrightarrow a_1=a_2$ 且 $n_1=n_2$；

加法 $(a_1,n_1)+(a_2,n_2)=(a_1+a_2,n_1+n_2)$；

乘法 $(a_1,n_2)(a_2,n_2)=(a_1a_2+n_1a_2+n_2a_1,n_1n_2)$，

则 $A\times N$ 成环. 又 $A\times 0=\{(a,0)\mid a\in A\}$ 是 $A\times N$ 的子环，它与 A 同构. 将 $A\times N$ 中 A

$\times 0$ 挖去而补之以 A,可得一以 A 为子环且与 $A\times N$ 同构的环 B. 显见 B 是以为(0,1)单位的非零元. □

注 1 定理 1 中,若 A 是结合环或交换环或结合且交换环,则可要求 B 有相应性质. 事实上,定理证明中所作的 B 即是如此.

定理 2 任一有单位元 e 的环 B 必有以 e 为单位的分裂环 C.

证明 取环 C 是于 $\widetilde{B}$ 中将子环 $B[I]$ 挖去而补之以 B 所得的以 B 为子环且与 $\widetilde{B}$ 同构的环. 显见 C 以 e 为单位元. 现证 C 是 B 的分裂环.

设 $\varphi=\sum\limits_{0\leqslant p\leqslant n}a_pS^p$ 是 $B[S]$ 中任一次数 $n\geqslant 1$ 的首 1 元. 若 $n=1$,显然 φ 有零点 $-a_0\in C$. 若 $n\geqslant 2$,作 B 上的矩阵

$$I_n=\begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \\ & & \ddots & \\ & & & e \end{bmatrix},\quad H_\varphi=\begin{bmatrix} & e & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & e \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$G_0=I_n,\ G_p=a_{n-p}I_n+G_{p-1}H_\varphi,\ 1\leqslant p\leqslant n. \tag{4}$$

再作$\infty\times\infty$分块对角阵

$$\hat{H}_\varphi=\mathrm{diag}(H_\varphi,\cdots),\hat{G}_p=\mathrm{diag}(G_p,\cdots), \tag{5}$$

将(3)代入(4),逐个计算,可得

$$G_1=\begin{bmatrix} a_{n-1} & e & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & e \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} \end{bmatrix},\cdots,G_{n-1}=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & e \\ -a_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & -a_0 \end{bmatrix},G_n=0.$$

但由(4),逐次迭代,又得

$$G_1=a_{n-1}I_n+H_\varphi,\cdots,G_{n-1}=a_1I_n+a_2H_\varphi+\cdots+((a_nH_\varphi)\cdots)H_\varphi,G_n=\varphi(H_\varphi),$$

所以

$$G_n=\varphi(H_\varphi)=0,\hat{G}_n=\varphi(\hat{H}_\varphi)=0, \tag{6}$$

可见 φ 有右零点 $\hat{H}_\varphi\in C$,于是知 C 是 B 的分裂环. □

注 2 定理 2 中,若是 B 结合的,则可以要求 C 是结合的. 事实上,定理之证中所作的环 C 即是如此.

定理 3 任一有单位元 e 的环 B 必有以 e 为单位元的代数封闭扩张环 D.

证明 设 $B=C_0$;环 C_{p+1} 是环 C_p 的分裂环,且 C_{p+1} 以 C_p 的单位元为单位元;

$$D=\bigcup_{p=0}^{\infty}C_p.$$

不难验证,此 D 是环,且 e 是它的单位元. 对任一次数 $n\geqslant 1$ 的首 1 元

$$\varphi=\sum a_pS^p\in D[S],$$

显见 $a_0,\cdots,a_n$ 必同在某一 C_p 中,故有元 $c\in C_{p+1}$,使 $\varphi(c)=0$. 所以,D 是代数封闭的. □

注 3 定理 3 中,若 B 是结合的,则可以要求 D 具有结合性. 事实上,定理之证中所作的 D 即是如此.

4 环扩张的性质

定理 4 设 A 是有单位元 e 的非零环. 则 A 有扩张环 B, 满足下列条件

1° B 以 e 为单位元.

2° B 中有 B 上的非零因子非交换元.

3° B 中有 B 上的非零因子非结合元.

证明 首先作环 B. 设 A_2 是 A 上 2 阶矩阵全体依通常矩阵运算所成的环. 则

$$A_{20} = \{aI_2 | a \in A\}$$

成 A_2 的子环, 且 A_{20} 与 A 环同构. 于 A_2 中挖去 A_{20} 而补之以 A 可得一以 A 为子环且与 A_2 同构的环 B_1. 在 B_1 上添加符号 g, 设 $B = \{a + bg | a, b \in B_1\}$. 在 B 上规定

$$a + 0g = a, 0 + bg = bg, eg = g, a + bg = c + dg \Leftrightarrow a = c \text{ 且 } b = d.$$

加法 $(a + bg) + (c + dg) = (a + c) + (b + d)g$.

乘法 $(a + bg)(c + dg) = (ac + db) + (cb + ad)g$.

则易知 B 成 B_1 的扩张环. 下证此 B 满足定理要求. 由 B 之作法知, B 满足 1°.

在 B 中取 2 个元 $u = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix}$, 有

$$uv = \begin{pmatrix} e & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & e \end{pmatrix} = vu.$$

所以, u 是 $\begin{pmatrix} e & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix}$ 上的非交换元. 不难验证, u 亦非 B 上的零因子. 2° 真.

对于上述的 u, v 与 g, 有

$$(ug)v = (vu)g \neq (uv)g = u(gv). \tag{7}$$

又若 $0 \neq a + bg \in B$, 则

$$(a + bg)g = g(a + bg) = b + ag \neq 0, \tag{8}$$

所 g 既非结合元又非零因子, 3°成立. □

定理 5 设环 B 有单位元 e. 则 B 有扩张环 C, 满足条件

1° C 以 e 为单位元.

2° C 中有 B 上的中心未定元.

3° C 中有 B 上的非交换(非结合)未定元, 如果 B 中有非零因子的非交换(非结合)元.

证明 取 C 是将环 $B[S]$ 中子环 $B[I]$ 换作 B 而得的以 B 为子环, 且与 $B[S]$ 同构的环, 现证此 C 满足定理要求.

显见 C 满足 1°. 又 $S \in C$, 且 S 是 B 上的中心元. 若 $0 \neq \varphi \in B[S]$, 则 $\varphi(S) = \varphi^{T}(S) = \varphi \neq 0$. 所以 S 是 B 上的中心未定元, C 满足 2°.

如果 B 中有非零因子的非交换(非结合)元 u, 则由 S 是 B 上非零因子中心元, 可知 uS 是 C 中的非零因子的非交换(非结合)元. 对于 $B[S]$ 中任一元 $\varphi = \sum a_p S^p \neq 0$, 取

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1 u, \cdots, b_p = (\cdots((a_p u)u)\cdots)u, \cdots;$$

$$c_0 = a_0, c_1 = ua_1, \cdots, c_p = u(\cdots(u(ua_p))\cdots), \cdots.$$

因至少有一个 $a_p \neq 0$, 故相应的 $b_p \neq 0$ 且 $c_p \neq 0$. 从而

$$\varphi(uS)=\sum b_pS^p\neq 0 \text{ 且 } \varphi^T(uS)=\sum b_pS^p\neq 0, \tag{9}$$

所以 $uS\in C$ 是 B 上的非交换(非结合)未定元. C 满足 3°. □

以下总设环 A 及其将要涉及的扩张环都有同一单位元 e,且 x 是其上的未定元.

定理 6 设 b 是环 A 中任一元,有

1° 加群 $A[x]$ 与加群 $A[b]$ 同态,加群 $A^T[x]$ 与加群 $A^T[b]$ 同态.

2° 若 x 与 b 都是 A 上的结合元,则 A 左模 $A[x]$ 与 A 左模 $A[b]$ 同态,A 右模 $A^T[x]$ 与 A 右模 $A^T[b]$ 同态.

3° 若 x 与 b 都是 A 上的中心元,则环 $A[x]$ 与环 $A[b]$ 同态.

证明 显见如下的二映射是相应的同态映射:

$$\begin{array}{l} R:\varphi(x)\to\varphi(b) \\ T:\varphi^T(x)\to\varphi^T(b), \end{array}\quad \varphi\in A[S].$$ □

定理 7 设 A_b 是环 A 与其上元 b 生成的环,次数 $n\geqslant 1$ 的元 $\varphi=\sum a_pS^p\in A[S]$. 则

1° 有次数是 $n-1$ 的 $\varphi_1\in A_b[S]$, 使得

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x))x-(\varphi_1 b)(x)+\varphi(b), \tag{10}$$

$$\varphi^T(x)=x(\varphi_1^T(x))-(\varphi_1 b)^T(x)+\varphi(b). \tag{11}$$

2° 有次数是 $n-1$ 的 $\Psi_1\in A_b[S]$,使得

$$\varphi^T(x)=x(\Psi_1^T(x))-(b\Psi_1)^T(x)+\varphi^T(b), \tag{12}$$

$$\varphi(x)=(\Psi_1(x))x-(b\Psi_1)(x)+\varphi^T(b). \tag{13}$$

证明 若 $n=1$,则 $\varphi_1=a_1$ 使 1°成立. 若 $n\geqslant 2$,取

$$c_n=0, c_{n-p}=a_{n-p+1}+a_{n-p+2}b+\cdots+(\cdots((a_nb)b\cdots)b.$$

令 $\varphi_1=\sum_{0\leqslant p\leqslant n}c_pS^p$. 则 $n-1$ 次的 $\varphi_1\in A_b[S]$,且 $a_p=c_{p-1}-c_pb(0\leqslant p\leqslant n)$. 它使得

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=a_0+a_1x+(a_2x)x+\cdots+(\cdots((a_nx)x)\cdots)x\\ &=(c_{-1}-c_0b)+(c_0-c_1b)x+((c_1-c_2b)x)x+\cdots+(\cdots((c_nx)x)\cdots)x\\ &=(c_0+c_1x+\cdots+(\cdots((c_{n-1}x)x)\cdots)x)x-(c_0b+(c_1b)x+\\ &\quad((c_2b)x)x+\cdots+(\cdots((c_{n-1}b)x)\cdots)x)+c_{-1}\\ &=(\varphi_1(x))x-(\varphi_1b)(x)+\varphi^T(b).\end{aligned}$$

所以此 φ_1 使(10)成立. 类似可证它使(11)成立.

1° 得证. 同理可证 2°. □

注 4 定理 6 中,若 φ 是首 1 的,显见 φ_1 与 Ψ_1 都是首 1 的.

5 代数封闭环的性质

引理 1 设 x 是环 A 的扩张环 B 上的中心未定元,φ 是 $A[S]$ 中次数 $n\geqslant 1$ 的首 1 元. 则 $b\in B$ 是 φ 的右(左)零点的充要条件是存在 $\varphi_1\in A_b[S]$,使

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x))(x-b)(\varphi^T(x)=(x-b)(\varphi_1^T(x))). \tag{14}$$

证明 仅证"右"情形. 对于 $b\in B$,由定理 7,有 $\varphi_1\in A_b[S]$ 使(10)成立. 若 b 是 φ 的右零

点而 x 是中心元，则由(10)得

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x))x-(\varphi_1 b)(x)+\varphi(b)=(\varphi_1(x))(x-b). \tag{15}$$

反过来，若 $\varphi(x)=(\varphi_1(x))(x-b)$，则

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x))x-(\varphi_1 b)(x).$$

故对于 B 上的非中心未定元 y，有

$$\varphi(y)=(\varphi_1(y))y-(\varphi_1 b)(y).$$

由定理 6，将 $y=b$ 代入上式，得

$$\varphi(b)=(\varphi_1(b))b-(\varphi_1 b)(b)=0. \qquad \square$$

定理 8 设 A 是结合环，则下二命题等价

1° A 是代数封闭环.

2° $A[S]$ 中任一次数 $\geqslant 2$ 的首 1 元有在 A 内的左零点.

证明 设 $\varphi\in A[S]$ 是次数为 $n\geqslant 2$ 的首 1 元. 取 x 为 A 上的中心未定元. 若 1° 成立，则由 A 的结合性与引理 1 知，有 $a_1,\cdots,a_n\in A$ 使得

$$\varphi(x)=(x-a_n)\cdots(x-a_1). \tag{16}$$

又由引理 1 及(16)知，φ 有左零点 $a_n\in A$. 1°⇒2°.

若 2° 成立，由引理 1 知有 $a_1,\cdots,a_n\in A$ 使(16)成立. 可见 φ 有右零点 $a_1\in A$，2°⇒1°. □

定理 9 若非零环 A 是代数封闭的，则 A 上的每一个结合右(左)零点有在 A 内的左(右)特征值.

证明 设 b 是 A 上的一个结合右零点. 在 $A[S]$ 中取一个左零化 b 的次数最小的首 1 多项式 φ，并取 φ 在 A 内的一个左零点 c. 设 x 是 A 上的结合未定元，则由定理 7，有首 1 元 $\varphi_1\in A[S]$，使得

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x))x-(c\varphi_1)(x). \tag{17}$$

将 $x=b$ 代入(17)，得

$$\varphi(b)=(\varphi_1(b))b-(c\varphi_1)(b)=0. \tag{18}$$

注意到 b 的结合性，得

$$(\varphi_1(b))b=c(\varphi_1(b)). \tag{19}$$

又由 φ 的取法知 $\varphi_1(b)\neq 0$，故 c 是 b 在 A 内的左特征值. 类似可证另一情形. □

6 四元数体的代数封闭性

设 P 是实封闭域，C 是 P 添加元 $i(i^2=-1)$ 而得的代数封闭域，Q 是 C 添加元 $j(j^2=-1,ij=-ji)$ 而得的四元数结合体[5]. 用 $\bar\varphi$ 表示 $\varphi\in Q[S]$ 的共轭元.

引理 2 任一 $a\in Q$ 可写作

$$a=bcb^{-1},0\neq b\in Q,c\in C. \tag{20}$$

证明 设 $a=a_1+ja_2(a_1,a_2\in C)$. 取 $c,b_1,b_2\in C$，满足

$$\det\begin{pmatrix}a_1-c & -\bar a_2\\ a_2 & \bar a_1-c\end{pmatrix}=0,\ \begin{pmatrix}a_1-c & -\bar a_2\\ a_2 & \bar a_1-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

令 $b=b_1+jb_2$，则 $0\neq b\in Q$，且由(21)，得

$$(a_1+ja_2)(b_1+jb_2)=(a_1b_1-\bar{a}_2b_2)+j(a_2b_1+\bar{a}_1b_2)=b_1c+jb_2c=bc, \tag{22}$$

所以 $a=bcb^{-1}$. □

引理 3 设 φ 是 $Q[S]$ 中任一次数 $\geqslant 1$ 的元. 若 $a=bcb^{-1}(0\neq b\in Q, c\in C)$ 是 φ 的右零点，则 $(\varphi\bar{\varphi})(c)=0$.

证明 设 $\varphi=\varphi_1+j\varphi_2(\varphi_1,\varphi_2\in C[S])$，$b=b_1+jb_2(b_1,b_2\in C)$. 若 $c\in C$，使得 $\varphi(bcb^{-1})=0$，则由 Q 的结合性及 C 的结合交换性，得

$$\begin{aligned}&((\varphi_1(c)b_1-\bar{\varphi}_2(c)b_2)+j(\varphi_2(c)b_1+\bar{\varphi}_1(c)b_2))b^{-1}\\&=(((\varphi_1b_1-\bar{\varphi}_2b_2)+j(\varphi_2b_1+\bar{\varphi}_1b_2))(c))b^{-1}\\&=(((\varphi_1+j\varphi_2)(b_1+jb_2))(c))b^{-1}\\&=((\varphi b)(c))b^{-1}\\&=\varphi(bcb^{-1})=0,\end{aligned} \tag{23}$$

所以

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(c) & -\bar{\varphi}_2(c)\\ \varphi_2(c) & \bar{\varphi}_1(c)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \tag{24}$$

所以

$$\begin{aligned}(\varphi\bar{\varphi})(c)&=(\varphi_1\bar{\varphi}_1+\varphi_2\bar{\varphi}_2)(c)=\varphi_1(c)\bar{\varphi}_1(c)+\varphi_2(c)\bar{\varphi}_2(c)\\&=\det\begin{pmatrix}\varphi_1(c) & -\bar{\varphi}_2(c)\\ \varphi_2(c) & \bar{\varphi}_1(c)\end{pmatrix}=0.\end{aligned} \tag{25}$$

定理 10 实封闭域上的四元数体 Q 是代数封闭的.

证明 设 $\varphi=\varphi_1+j\varphi_2(\varphi_1,\varphi_2\in C[S])$ 是 $Q[S]$ 中次数 $\geqslant 1$ 的任一元. 取一个满足(25)的元 $c\in C$，再取一组满足(24)的元 $b_1,b_2\in C$.

令 $b=b_1+jb_2$. 则 $0\neq b\in Q$，且由(24)与(25)得知，如此的 b 与 c 使得(23)成立. 所以 φ 有右零点 $a=bcb^{-1}\in Q$. 可见 Q 是代数封闭的. □

注 5 Cayley 的八元数体[6] 的代数封闭性将另文证明.

感谢李作安先生给予本文的有益协作.

参考文献：

[1] 熊全淹. 近世代数 [M]. 上海：上海科技出版社，第二版，1978：117.
XIONG Quan-yan. *Modern Algebra* [M]. Shanghai: Shanghai Sci. Tec. Pub., 1978, **117**. (in Chinese)

[2] ZARSENHAUS H. *On the fundamental theorem of algebra* [J]. Amer. Math. Monthly, 1967, **74**: 485—496.

[3] STEINITZ E. *Algebralsche Theorie der Körper* [M]. Herausges von R. Baer und H. Hasse, Berlin, 1930, 1—7.

[4] ARTIN, SCHREIER E U. *Algebraiche Konstruktion reller Korper* [J]. Abh. Math. Sem. Hamburg, 1926, **5**: 83—115.

[5] SUDBETG A. *Quaternionic analysis* [J]. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1997, **85**: 199—225.

[6] ZORN. *Alternativkoper und quadratische systeme* [J]. Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, 1933, **9**: 395.

On the Algebraically Complete Property of Rings

GUO Shi-guang

(Sichuan Institute of Light Industary & Chemical Technology, Zigong 643033, China)

Abstract: The two theorems are proved that any ring can be extended into an algebraically closed ring and that the quaternionic skew field over a real closed field is algebraically closed. Meanwhile, some properties of the algebraically closed rings are given.

Key words: null point; splitting ring; algebraically closed; indeterminate element; eigenvalue.