第 22 卷第 4 期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

强奇异积分算子交换子的端点估计*

鲁志波， 李 彬
(信息工程大学应用数学系，河南 郑州 450002)

摘 要：本文考虑强奇异积分算子的交换子在 Hardy 型空间上的端点估计，建立了这类交换子从 $H^1(R^n)$ 到弱 $L^1(R^n)$ 上的有界性及 $H^1(R^n)$ 的某个子空间到 $L^1(R^n)$ 上的有界性结果.

关键词：强奇异积分算子；交换子；Hardy 空间；BMO.
分类号：AMS(2000) 42B20/CLC O174.2
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)04-0651-06

1 引 言

设 $T:D\to D'$ 是一个有界线性算子，我们称 T 为强奇异积分算子，假若 T 满足条件：

(S_1) T 能扩张为 L^2 上的有界算子；

(S_2) 存在一 $\{(x,y):x\neq y\}$ 上的连续函数 $K(x,y)$ 满足

$$|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|\leqslant\frac{C|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\delta/\alpha}},$$

当 $2|y-z|^\alpha\leqslant|x-z|$，其中 $0<\alpha<1,0<\delta\leqslant1$，并满足

$$(Tf,g)=\int K(x,y)f(y)g(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\ 当\ \mathrm{supp}(f)\cap\mathrm{supp}(g)=\varnothing;$$

(S_3) 对某一满足 $(1-\alpha)n/2\leqslant\beta<n/2$ 的 β，T 及其共轭算子 T^* 能扩充为 $L^q\to L^2$ 上有界算子，其中 $1/q=1/2+\beta/n$.

关于强奇异积分算子已有很多作者进行过研究(见[1]－[3]). Alvarez 和 Milman[2] 证明了强奇异积分算子的弱(1,1)有界性，并利用插值给出了这类算子的 $L^p(1<p<\infty)$ 有界性结果. 而且根据[2]中的(3.2)式我们容易得到强奇异积分算子的 Sharp 函数估计，即 $(Tf)^\#(x)\leqslant CM_2f(x)$. 于是利用一个标准的讨论，可以发现当 $2<p<\infty$ 且权函数 $w(x)\in A_{p/2}$ 时，有 $\|Tf\|_{p,w}\leqslant C\|f\|_{p,w}$.

本文的目的是考虑强奇异积分算子的交换子在 Hardy 型空间上的端点估计. 设 $b(x)\in\mathrm{BMO}(R^n)$，定义强奇异积分算子的交换子为

$$T_bf(x)=[b,T]f(x)=\int_{R^n}K(x,y)(b(x)-b(y))f(y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

* 收稿日期：1999-12-06
作者简介：鲁志波(1976-)，男，湖北天门人，硕士.

由强奇异积分算子的加权不等式和著名的Alvarez-Bagby-Kurtz－Pérez定理[4]易知这类交换子 T_b 是 $L^p(R^n)(1<p<\infty)$ 上的有界算子. 本文将建立交换子 T_b 从 $H^1(R^n)$ 到弱 $L^1(R^n)$ 上的有界性及 $H^1(R^n)$ 的子空间 $H_b{}^1(R^n)$ 到 $L^1(R^n)$ 上的有界性结果. 在陈述定理之前先给出一个定义.

定义 1[5]　设 $b(x)$ 是 R^n 上的一个函数, $a(x)$ 称为是一个 b- 原子, 假若它满足

(i) $\mathrm{supp}(a)\subset B(x_0,r)$;

(ii) $\|a\|_\infty\leqslant|B|^{-1}$;

(iii) $\int_B a(y)\mathrm{d}y=0$;

(iv) $\int_B a(y)b(y)\mathrm{d}y=0$.

这里 $B(x_0,r)$ 表示以 x_0 为中心, r 为半径的球体, $|B|$ 为其Lebesgue 测度. 记 b- 原子生成的函数空间为

$$H_b{}^1(R^n)=\{f\in L^1(R^n):f=\sum_j\lambda_j a_j,\text{其中 } a_j \text{ 是 } b\text{- 原子且}\sum_j|\lambda_j|<\infty\}.$$

定义函数 f 在该空间上的范数为

$$\|f\|_{H_b{}^1}=\inf(\sum_j|\lambda_j|),\text{这里的下确界是对一切分解 } f=\sum_j\lambda_j a_j \text{ 而取}.$$

本文的主要结果可叙述如下:

定理 1　设 $b(x)$ 是一个 BMO 函数, $0<\alpha<1$, T_b 是如(1)所定义的强奇异积分算子交换子. 假若 $(1-\alpha)n/2<\beta<n/2$, 则 T_b 是 $H^1(R^n)$ 到弱 $L^1(R^n)$ 上的有界算子且界为 $C\|b\|_{\mathrm{BMO}}$.

定理 2　设 $b(x)$ 是一个 BMO 函数, $0<\alpha<1$, T_b 是如(1)所定义的强奇异积分算子交换子. 假若 $(1-\alpha)n/2<\beta<n/2$, 则 T_b 是 $H_b{}^1(R^n)$ 到 $L^1(R^n)$ 上的有界算子且界为 $C\|b\|_{\mathrm{BMO}}$.

2　定理 1 的证明

不失一般性, 不妨假定 $\|b\|_{\mathrm{BMO}}=1$. 设 $f=\sum\lambda_B a_B$, 其中 a_B 是支集为球体 $B(x_0,r)$ 的 $(1,\infty)$ 原子. 我们只需证明当 f 是原子的有限和时结论成立即可, 而一般的情形可通过极限讨论得到. 为计算方便, 可假定所有的 $\lambda_B>0$, 事实上, 这一点可通过改变原子 $a_B(x)$ 的符号得到; 同时, 不妨假定 $\sum\lambda_B\leqslant 2\|f\|_{H^1}$. 记 b_B 为函数 b 在球体 B 上的平均, 即 $b_B=(1/|B|)\int_B b(x)\mathrm{d}x$. 写

$$\begin{aligned}T_bf(x)&=\sum\lambda_B\int K(x,y)(b(x)-b_B)a_B(y)\mathrm{d}y+\int K(x,y)\sum\lambda_B(b_B-b(y))a_B(y)\mathrm{d}y\\&=\sum\lambda_B(b(x)-b_B)Ta_B(x)+T(\sum\lambda_B(b_B-b)a_B)(x).\end{aligned}$$

因此, 对任意的 $\lambda>0$ 我们有

$$\begin{aligned}|\{x:|T_bf(x)|>\lambda\}|\leqslant{}&|\{x:|\sum\lambda_B(b(x)-b_B)Ta_B(x)|>\lambda/2\}|+\\&|\{x:|T(\sum\lambda_B(b_B-b)a_B)(x)|>\lambda/2\}|.\end{aligned}$$

由强奇异积分算子的弱(1,1)有界性显然有

$$|\{x:|T(\sum\lambda_B(b_B-b)a_B)(x)|>\lambda/2\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\sum\lambda_B\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{H^1}.\qquad(2)$$

另一方面，

$$|\{x:|\sum\lambda_B(b(x)-b_B)Ta_B(x)|>\lambda/2\}|\leqslant C\sum\lambda_B\int_{R^n}\frac{|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|}{\lambda}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{C}{\lambda}\sum_{r>1}\lambda_B\int_{R^n}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x+\frac{C}{\lambda}\sum_{r\leqslant1}\lambda_B\int_{R^n}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x.\qquad(3)$$

我们首先估计(3) 式中 $r>1$ 的一部分. 作分拆：

$$\int_{R^n}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{4B}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x+\int_{R^n\setminus 4B}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

这里 $4B$ 表示以 x_0 为中心，$4r$ 为半径的球体，利用 Hölder 不等式和 T 的 L^2 有界性，容易得到

$$I\leqslant C(\int_{4B}|b(x)-b_B|^2\mathrm{d}x)^{1/2}\|a_B\|_2\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

由原子的矩消失性条件，再写

$$\mathrm{II}=\int_{R^n\setminus 4B}|b(x)-b_B\|\int_B(K(x,y)-K(x,x_0))a_B(y)\mathrm{d}y|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_B|a_B(y)|\sum_{j=2}^{\infty}\int_{2^jr\leqslant|x-x_0|<2^{j+1}r}|K(x,y)-K(x,x_0)\|b(x)-b_B|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $x\in R^n\setminus 4B,y\in B$ 时，显然 $2|y-x_0|^\alpha\leqslant 2r^\alpha<2r<|x-x_0|$ 对 $r>1$ 成立. 条件(S_2)表明

$$\mathrm{II}\leqslant\int_B|a_B(y)|\sum_{j=2}^{\infty}\int_{2^jr\leqslant|x-x_0|<2^{j+1}r}\frac{Cr^\delta}{(2^jr)^{n+\delta/\alpha}}|b(x)-b_B|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_B|a_B(y)|\mathrm{d}y\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j\delta/\alpha}r^{\delta-\delta/\alpha}(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(x)-b_{2^{j+1}B}|\mathrm{d}x+|b_{2^{j+1}B}-b_B|)$$

$$\leqslant C\int_B|a_B(y)|\mathrm{d}y\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j\delta/\alpha}(\|b\|_{\mathrm{BMO}}+(j+1)\|b\|_{\mathrm{BMO}})\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

其中我们用到了 $|b_B-b_{2^{j+1}B}|\leqslant C(j+1)\|b\|_{\mathrm{BMO}}$ 这一事实.

下面考虑(3)式中 $r\leqslant1$ 的一部分，设 $0<\theta<\alpha,\theta$ 的值待定. 记 $B^*=B(x_0,r^\theta)$. 写

$$\int_{R^n}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{4B^*}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x+\int_{R^n\setminus 4B^*}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{4B^*}|b(x)-b_{B^*}\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x+\int_{4B^*}|b_{B^*}-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x+$$

$$\int_{R^n\setminus 4B^*}|b(x)-b_{B^*}\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x+\int_{R^n\setminus 4B^*}|b_{B^*}-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x$$

$$=E+F+G+H.$$

条件(S_3)告诉我们 T 是 L^q 到 L^2 上的有界算子，因此，

$$E\leqslant(\int_{4B^*}|b(x)-b_{B^*}|^2dx)^{1/2}(\int_{4B^*}|Ta_B(x)|^2\mathrm{d}x)^{1/2}$$

$$\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}|B^*|^{1/2}\|a_B\|_q\leqslant Cr^{n\theta/2+(1-q)n/q}.$$

注意到对任意的 $\epsilon>0$，存在常数 $C(\epsilon)>0$ 使得

$$|b_{B^*}-b_B|\leqslant C(\theta-1)\log r\,\|b\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C(\varepsilon)r^{-\varepsilon}.$$

从而

$$F\leqslant Cr^{-\varepsilon}\int_{4B^*}|Ta_B(x)|\mathrm{d}x\leqslant Cr^{-\varepsilon}\Big(\int_{4B^*}\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_{4B^*}|Ta_B(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant Cr^{-\varepsilon}|B^*|^{1/2}\|a_B\|_q\leqslant Cr^{n\theta/2+(1-q)n/q-\varepsilon}.$$

另一方面，

$$G\leqslant\int_B|a_B(y)|\int_{R^n\setminus 4B^*}|K(x,y)-K(x,x_0)\|b(x)-b_{B^*}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

且当 $0<\theta<\alpha$ 时，对于 $x\in R^n\setminus 4\,B^*$ 和 $y\in B$，不等式 $2|y-x_0|^\alpha<|x-x_0|$ 对 $r\leqslant 1$ 成立. 因此，

$$G\leqslant\int_B|a_B(y)|\sum_{j=2}^{\infty}\int_{2^jr^\theta\leqslant|x-x_0|<2^{j+1}r^\theta}\frac{Cr^\delta}{(2^jr^\theta)^{n+\delta/\alpha}}|b(x)-b_{B^*}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant C\int_B|a_B(y)|\mathrm{d}y\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j\delta/\alpha}r^{\delta-\theta\delta/\alpha}\|b\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant Cr^{\delta-\theta\delta/\alpha}.$$

同样地，可以得到

$$H\leqslant Cr^{-\varepsilon}\int_B|a_B(y)|\int_{R^n\setminus 4\,B^*}|K(x,y)-K(x,x_0)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant Cr^{\delta-(\theta\delta/\alpha)-\varepsilon}.$$

令 $\theta=\dfrac{\delta-\varepsilon}{\delta}\alpha$，则 θ 满足 $0<\theta<\alpha$，并且在 $0<\alpha<1$，$(1-\alpha)n/2<\beta<n/2$ 时，只要 ε 充分小，所取的 θ 就可使得上面对 E,F,G 和 H 四项的估计中 r 的指数大于或等于 0，从而有常数 C 使得

$$\int_{R^n}|b(x)-b_B\|Ta_B(x)|\mathrm{d}x\leqslant C.$$

结合 $r>1$ 和 $r\leqslant 1$ 的估计就可以得到想要的结论，从而完成了定理 1 的证明.

3　定理 2 的证明

不妨设 $\|b\|_{\mathrm{BMO}}=1$. 我们只需证明对任意的 b-原子 $a(x)$，存在常数 $C>0$ 使得不等式成立

$$\int_{R^n}|T_ba(x)|\mathrm{d}x\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}.\tag{5}$$

设 $\mathrm{supp}(a)\subset B(x_0,r)$. 为证明估计式(5)，我们分如下两种情形来讨论.

情形 1　$r>1$. 写

$$\int_{R^n}|T_ba(x)|\mathrm{d}x=\int_{2B}|T_ba(x)|\mathrm{d}x+\int_{R^n\setminus 2B}|T_ba(x)|\mathrm{d}x=(\mathrm{I})+(\mathrm{II}).$$

利用 Hölder 不等式和交换子 T_b 的 L^2 有界性，易知(Ⅰ)$\leqslant C$.

现在考虑第(Ⅱ)项. 由 b-原子的矩消失性条件可得

$$(\mathrm{II})=\int_{R^n\setminus 2B}\Big|\int_B(K(x,y)-K(x,x_0))(b(x)-b(y))a(y)\mathrm{d}y\Big|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_B|a(y)|\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jr\leqslant|x-x_0|<2^{j+1}r}|(K(x,y)-K(x,x_0))(b(x)-b(y))|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $x\in R^n\setminus 2B$，$y\in B$ 时，显然 $2|y-x_0|^\alpha<|x-x_0|$ 对 $r>1$ 成立，因此利用条件(S_2)我们得到

$$(\mathrm{II})\leqslant\int_B|a(y)|\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j+1}B}\frac{Cr^{\delta/\alpha}}{(2^{j+1}r)^{n+\delta/\alpha}}|b(x)-b(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\int_B|a(y)|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C2^{-j\delta/\alpha}}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}(|b(x)-b_{2^{j+1}B}|+|b_{2^{j+1}B}-b_B|+|b_B-b(y)|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\int_B|a(y)|\sum_{j=1}^{\infty}C2^{-j\delta/\alpha}(\|b\|_{\mathrm{BMO}}+C(j+1)\|b\|_{\mathrm{BMO}}+|b_B-b(y)|)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{C}{|B|}\int_B(\|b\|_{\mathrm{BMO}}+|b(y)-b_B|)\mathrm{d}y\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

情形 2　$r\leqslant1$. 设 $0<\gamma<\alpha$, γ 的值待定，此时记 $\widetilde{B}=B(x_0,r^\gamma)$. 类似定理 1 的证明，写

$$T_ba(x)=(b(x)-b_B)Ta(x)+T((b_B-b)a)(x).$$

因此，利用 b-原子的定义我们得到

$$\|T_ba\|_1\leqslant\int_{R^n}|(b(x)-b_B)Ta(x)|\mathrm{d}x+\int_{R^n}|T((b-b_B)a)(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{4\widetilde{B}}|T((b-b_B)a)(x)|\mathrm{d}x+\int_{R^n\setminus4\widetilde{B}}\int_B|K(x,y)-K(x,x_0)\|b_B-b(y)\|a(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x+$$

$$\int_{R^n}|(b(x)-b_B)Ta(x)|\mathrm{d}x=U+V+W.$$

由 Hölder 不等式和强奇异积分算子 T 的 L^q 到 L^2 有界性即得

$$U\leqslant C|\widetilde{B}|^{1/2}\Big(\int_B|b(x)-b_B|^q|a(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}r^{n\gamma/2+(1-q)n/q}.$$

对 V 项再次利用条件(S_2)，则有

$$V\leqslant\int_B|b(y)-b_B\|a(y)|\mathrm{d}y\sum_{j=2}^{\infty}\int_{2^jr^\gamma\leqslant|x-x_0|<2^{j+1}r^\gamma}\frac{Cr^\delta}{(2^jr^\gamma)^{n+\delta/\alpha}}\mathrm{d}x\leqslant Cr^{\delta-\gamma\delta/\alpha}.$$

注意到 W 项与定理 1 中 $r\leqslant1$ 的部分类似，从前面的证明可知，对充分小的 $\varepsilon>0$，若取 $\gamma=(\delta-\varepsilon)\alpha/\delta$，容易验证当 $0<\alpha<1$, $(1-\alpha)n/2<\beta<n/2$ 时，U, V 和 W 三项的估计中 r 的指数大于或等于 0. 这样结合 $r>1$ 和 $r\leqslant1$ 的估计我们就可得到不等式(5)，从而完成定理 2 的证明.

4　定理的推广

设 $b(x)$是一个 BMO 函数，定义强奇异积分算子的 m 阶交换子为

$$T_b^mf(x)=\int_{R^n}K(x,y)(b(x)-b(y))^mf(y)\mathrm{d}y,m=0,1,2\cdots.\tag{6}$$

显然有 $T_b^0=T$, $T_b^m=[b,T_b^{m-1}]$, $m=1,2,\cdots$. 类似于定义 1，我们给出 m 阶 b-原子的定义，即

定义 2[5]　设 $b(x)$是 R^n 上的一个函数，$a(x)$称为是一个 m 阶 b-原子，假若它满足条件

(i) $\mathrm{supp}(a)\subset B(x_0,r)$;

(ii) $\|a\|_\infty\leqslant|B|^{-1}$;

(iii) $\int_Ba(y)b(y)^k\mathrm{d}y=0,k=0,1,\cdots m.$

记 m 阶 b- 原子生成的函数空间为

$$H^1_{b,m}(R^n)=\{f\in L^1(R^n):f=\sum\nolimits_j\lambda_ja_j,\text{其中 }a_j\text{ 是 }m\text{ 阶 }b\text{- 原子且}\sum\nolimits_j|\lambda_j|<\infty\}.$$

利用文献[5]中的有关思想和定理 2 的有关证明，我们可以得到如下结果：

定理 3 设 $b(x)$ 是一个 BMO 函数，$0<\alpha<1$，T_b^m 是如(6)所定义的强奇异积分算子的高阶交换子. 假若 $(1-\alpha)n/2<\beta<n/2$，则 T_b^m 是 $H^1_{b,m}(R^n)$ 到 $L^1(R^n)$ 上的有界算子且界为 $C\|b\|^m_{\mathrm{BMO}}$.

致谢 作者对胡国恩教授的悉心指导表示衷心地感谢.

参考文献：

[1] ALVAREZ J, MILMAN M. *H^p continuity properties of Calderón-Zygmund type operators* [J]. J. Math. Ann. Appl., 1986, **118**: 63—79.

[2] ALVAREZ J, MILMAN M. *Vector valued inequalities for strongly singular Calderón-Zygmund operators* [J]. Rev. Mat. Iberoamericana, 1986, **2**(4): 405—426.

[3] CHANILLO S. *Weighted norm inequalities for strongly singular convolution operators* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1984, **281**(1): 77—107.

[4] ALVAREZ J, BAGBY R J, KURTZ D S, et al. *Weighted estimates for commutators of linear operators* [J]. Studia Math., 1993, **104**: 195—209.

[5] PEREZ C. *Endpoint estimate for commutators of singular integral operators* [J]. J. Funct. Anal., 1995, **128**: 163—185.

Endpoint Estimates for Commutators of Strongly Singular Integral Operators

LU Zhi-bo, LI Bin

(Dept. of Appl. Math., Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: In this paper, we consider endpoint estimates for commutators of strongly singular integral operators on Hardy space, and establish the boundedness from the space $H^1(R^n)$ to weak $L^1(R^n)$ and from a subspace of $H^1(R^n)$ to $L^1(R^n)$, respectively.

Key words: strongly singular integral operator; commutator; Hardy space; BMO.