第22卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 22 No. 4
2002年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2002

最大度不小于6的伪-Halin图的完备色数*

刘林忠[1]，　张忠辅[2]，　王建方[3]

(1. 兰州铁道学院管理工程系，甘肃 兰州 730070；2. 兰州铁道学院应用数学研究所，甘肃 兰州 730070；
3. 中国科学院应用数学研究所，北京 100080)

摘　要：设 G 为2-连通平面图.若存在 G 的面 f_0，其中 f_0 的边界构成的圈上无弦且 $V(f_0)$ 中的点的度至少为3，使得在 G 中去掉 f_0 边界上的所有边后得到的图为除 $V(f_0)$ 中的点外度不小于3的树 T，则称 G 为伪-Halin图；若 $V(f_0)$ 中的点全为3度点，则称 G 为Halin-图.本文研究了这类图的完备色数，并证明了对 $\Delta(G)\geqslant 6$ 的伪-Halin图 G 有 $\chi_C(G)=\Delta(G)+1$.其中 $\Delta(G)$ 和 $\chi_C(G)$ 分别表示 G 的最大度和完备色数.

关键词：伪-Halin图；Halin-图；完备色数.

分类号：AMS(2000) 05C15/CLC O157.5

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2002)04-0663-06

1　引　言

定义1[6]　设 G 为2-连通平面图.若存在 G 的面 f_0，其中 f_0 的边界构成的圈上无弦且 $V(f_0)$ 中的点的度至少为3，使得去掉 f_0 边界上的所有边后得到的图为除 $V(f_0)$ 中的点外度不小于3的树 T，则称 G 为伪-Halin图；若 $V(f_0)$ 中的点全为3度点，则称 G 为Halin-图.称 f_0 为 G 的外部面(其它面为内部面)，$V(f_0)$ 中的点称为外点(其它点为内点).对 $v\in V(f_0)$，若 $d(v)=3$ 则称 v 为正则点(否则为非正则点).记 $R(f_0)$ 为正则点集，$IR(f_0)$ 为非正则点集.

显然若伪-Halin图 G 满足 $\Delta(G)=3$，则 G 为3-正则Halin图.

对平面图 $G(V,E,F)$，$f,f'\in F$，若 f 与 f' 至少有一条公共边，则称 f 与 f' 相邻；面 f 边界上的点和边称为与 f 相关联.

定义2　对平面图 $G(V,E,F)$，若映射 $f:V\cup E\cup F\rightarrow\{1,2,\cdots,k\}$ 满足：$V\cup E\cup F$ 中任意相邻或相关联的元素 e_1 和 e_2 有 $f(e_1)\neq f(e_2)$，则称 f 为 G 的一 k-正常点边面完备染色，简称 k-VEFC，并称 $\chi_C(G)=\min\{k\mid$ 存在 G 的一 k-VEFC$\}$ 为 G 的完备色数.

猜想(VEFCC)[1][2][3]　对简单平面图 G 有

$$\chi_C(G)\leqslant\Delta(G)+4.$$

* 收稿日期：2000-01-24

基金项目：国家自然科学基金资助项目(19871036)

作者简介：刘林忠(1963-)，男，甘肃武山人，副教授.

其中 $\Delta(G)$ 为 G 的最大度.

本文研究了伪-Halin 图的完备色数,并证明了对 $\Delta(G)\geqslant 6$ 的伪-Halin 图 G 有 $\chi_C(G)=\Delta(G)+1$. 其中 $\Delta(G)$ 和 $\chi_C(G)$ 分别表示 G 的最大度和完备色数. $N(v)$ 表示 $v\in V(G)$ 的邻点集合.

对平面图 G 的,用面的边界上的点表示面. 文中其它术语参见文献[4][5].

2 主要结果

引理 1[6] 若 G 为一伪-Halin 图, f_0 为 G 的其外部面,则

(1) 任意 $v\in V(f_0)$, $d(v)\geqslant 3$; 任意 $v\in IR(f_0)$, $d(v)\geqslant 5$;

(2) 任意两个相邻的内面或任意内面与外面间仅有一条公共边;

(3) 任意 $v\in IR(f_0)$, 在 $N(v)$ 中至多有两个点在同一内部面的边界上;

(4) 对 $v\in IR(f_0)$, v 的邻点之间不相邻.

引理 2[6] 设 G 为一伪-Halin 图 $(G\neq W_p)$, f_0 为 G 的外面. $P=v_1v_2\cdots v_k$ 为 $G-E(f_0)$ 中的最长路, $w\in\{v_2,v_{k-1}\}$, 则 G 中至少出现如下情况之一:

(1) 顶点 w 为 G 的满足 $N(w)\subseteq V(f_0)$ 且 $|N(w)\cap IR(f_0)|=1$ 的内点. 记 $N(w)=\{y,u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ $(m\geqslant 2)$; xu_1, yu_m, $u_iu_{i+1}\in E(f_0)$, 其中 $y\in IR(f_0)$, $x\neq u_2$ 且 $y\neq u_{m-1}$, $i=1,2,\cdots,m-1$, 则图

$$G_1^1=G-\{w,u_i|i=1,2,\cdots,k\}+\{xy\},\quad G_1^2=G-\{u_i,u_{i+1},\cdots,u_j\}+\{u_{i-1}u_{j+1}\}$$

仍为伪-Halin 图.

(2) 顶点 w 为 G 的满足 $|N(w)\cap(V(G)\backslash V(f_0))|=1$ 且 $|N(w)\cap R(f_0)|=d(w)-1$ 的内点. 记 $N(w)=\{u,u_1,u_2,\cdots,u_m\}$, 其中 u 为内点, $u_i\in R(f_0)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, xu_1, yu_m, $u_iu_{i+1}\in E(f_0)$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$, $x\neq u_2$, $y\neq u_{m-1}$, 则

$$G_2^1=G-\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}+\{xw,yw\},$$

$$G_2^2=G-\{u_i,u_{i+1},\cdots,u_j\}+\{u_{i-1}u_{j+1}\}, \text{其中}(2\leqslant i\leqslant j\leqslant m,m\geqslant 3)$$

仍为伪-Halin 图.

记引理 2 中的(1),(2)中的 w 构成的点的集合为 W.

引理 3[6] 对伪-Halin 图 G $(G\neq W_p)$ 有

(1) 若 w, x 和 y 为满足引理 2 中情况(1)的点,则 $xy\notin E(G)$;

(2) 若 w, x 和 y 为满足引理 2 中情况(2)的点,则 $|\{x,y\}\cap IR(f_0)|\leqslant 1$.

引理 4 对轮图 W_p $(p\geqslant 7)$ 有 $\chi_C(W_p)=p$.

引理 5[6] 至少存在一个引理 2 中的 $w\in W$ 满足 $\Delta(G_1^1)$, $\Delta(G_1^2)$, $\Delta(G_2^1)$ 和 $\Delta(G_2^2)$ 等于 $\Delta(G)$.

由伪-Halin 图的定义, G 的任意面 f 可被 f 边界上顺次的 3 个点表示.

定理 1 对 $\Delta(G)=6$ 的伪-Halin 图 G 有 $\chi_C(G)=7$.

证明 下面证明存在 G 的一 7-VEFC. 对 $p=|V(G)|$ 用归纳法.

记 C 为 7 种颜色的集合. 若 $p=7$, 则 $G=W_7$, 由引理 4 知存在 G 的一 7-VEFC. 若 $p=$

8，则不存在 $p=8$ 的伪-Halin 图. 若 $p=9$，不同构的图仅有一个，穷染即知结论成立. 下面假设 $p\geqslant 10$. 假设对 $|V(G)|<p$ 且 $(\Delta(G)=6)$ 的任意伪-Halin 图存在一 7-VEFC. 现证明当 $|V(G)|=p\ (p\geqslant 11)$ 时结论成立. 记 $C(v)$ 为 G 中顶点 v 及其与 v 相邻和相关联的元素的色的集合，$C'(v)$ 为 G_0 中顶点 v 及其与 v 相邻和相关联的元素的色的集合

情况 1　若 w 为满足引理 2 中情况(1)的点.

情况 1.1　若 $d(w)=3$，考虑图：$G_0=G-\{w,u_1,u_2\}+\{xy\}$. 其中 x，y，u_1 和 u_2 含义与引理 2 中情况(1)相同. 则 G_0 仍为伪-Halin 图且 $|V(G_0)|=p-2<p$，由引理 2 知 $\Delta(G_0)=6$. 由归纳假设，存在 G_0 的一 7-VEFC σ_0. 现在 σ_0 的基础上构造 G 的一 7-VEFC σ.

f 既表示 G_0 中其边界上含有边 xy 的面，又表示表示 G 中其边界上含有边 xu_1 和 u_1w 的内面. f_0 既表示 G_0 的外面，又表示 G 的外面. 记

$$Y=(V(G)\cup E(G)\cup F(G))\backslash\{w,u_1,u_2,xu_1,u_1u_2,u_2y,u_1w,u_2w,yw,u_1u_2w,u_2yw\}$$

情况 1.1.1　若 $\sigma_0(f_0)\in C'(y)$，则令 $\sigma(xu_1)=\sigma(yw)=\sigma(u_1u_2w)=\sigma_0(xy)$，$\sigma(u_2y)\in C\backslash C'(y)$，$\sigma(u_2w)=\sigma_0(f_0)$，$\sigma(u_1)=\sigma_0(y)$，$\sigma(u_2)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_1u_2)=\sigma(u_2yw)\in C\backslash\{\sigma_0(y),\sigma(yw),\sigma(u_2y),\sigma(u_2w),\sigma_0(f_0)\}$，$\sigma(w)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma_0(u_2),\sigma(u_2wy),\sigma(u_2w),\sigma(yw)\}$，$\sigma(u_1w)\in C\backslash\{\sigma(xu_1),\sigma(u_1),\sigma_0(u_1u_2),\sigma_0(u_2w),\sigma_0(f),\sigma_0(w)\}$，$\sigma(y)=\sigma_0(y)$，$y\in Y$，显然 σ 为 G 的 7-VEFC.

情况 1.1.2　若 $\sigma_0(f_0)\notin C'(y)$，则令 $\sigma(xu_1)=\sigma(yu_2)=\sigma(u_1u_2w)=\sigma_0(xy)$，$\sigma(yw)=\sigma_0(f_0)$，$\sigma(u_1)=\sigma(u_2w)=\sigma_0(y)$，$\sigma(u_2)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_1u_2)=\sigma(u_2yw)\in C\backslash\{\sigma(u-2),\sigma(u_2y),\sigma(yw),\sigma(u_2w)\}$，$\sigma(w)\in C\backslash\{\sigma(u_2),\sigma_0(u_2w),\sigma(u_2wy),\sigma(yw)\}$，$\sigma(u_1w)\in C\backslash\{\sigma(xu_1),\sigma(u_1),\sigma_0(u_1u_2),\sigma_0(yw),\sigma_0(f),\sigma(w)\}$，$\sigma(y)=\sigma_0(y)$，$y\in Y$，显然 σ 为 G 的 7-VEF.

情况 1.2　若 $d(w)=4$，考虑图：$G_0=G-\{w,u_1,u_2,u_3\}+\{xy\}$. 其中 x，y，u_1，u_2 和 u_3 与引理 2 中的情况(1)相同. f 既表示 G_0 的边界上含有边 xy 的内面，又表示 G 的边界上含有边 xu_1 和 u_1w 的内面. 则 G_0 仍为伪-Halin 图且 $|V(G_0)|=p-2<p$. 由引理 2，可设 $\Delta(G_0)=6$. 由归纳假设，存在 G_0 的一 7-VEFC σ_0. 现在 σ_0 的基础上构造 G 的一 7-VEFC σ. 记

$$M=\{w,u_1,u_2,u_3,xu_1,u_1u_2,u_2u_3,u_3y,u_1w,u_2w,u_3w,yw,u_1u_2w,u_2u_3w,u_3yw\}$$

$$Y=(V(G)\cup E(G)\cup F(G))\backslash M$$

情况 1.2.1　若 $\sigma_0(f_0)\in C'(y)$，$\sigma_0(f)\in C'(y)$，则令 $\sigma(xu_1)=\sigma(u_2u_3)=\sigma(yw)=\sigma_0(xy)$，$\sigma(u_2w)=\sigma_0(f_0)$，$\sigma(u_1)=\sigma(u_3w)=\sigma_0(y)$，$\sigma(u_1u_2)=\sigma(u_2u_3w)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_1w)=\sigma(u_2)=\sigma(u_3wy)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_1u_2),\sigma(u_2w)\}$，$\sigma(u_1u_w)=\sigma(u_3)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_1u_2),\sigma(u_1w),\sigma(u_2w)\}$，$\sigma(u_3y)=\sigma(w)\in C\backslash\{\sigma(wy),\sigma(y),\sigma(u_3),\sigma(u_3yw),\sigma_0(f),\sigma(u_2w)\}$，$\sigma(y)=\sigma_0(y)$，$y\in Y$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 1.2.2　若 $\sigma_0(f_0)\in C'(y)$，$\sigma_0(f)\notin C'(y)$，则在情况 1.2.1 中染色的基础上，令 $\sigma(u_3y)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_2u_3)=\sigma(w)$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 1.2.3　若 $\sigma_0(f_0)\notin C'(y)$，$\sigma_0(f)\notin C'(y)$，则在情况 1.2.2 染色的基础上令 $\sigma(u_3y)=\sigma(u_2u_3)=\sigma(xu_1)$，$\sigma(yw)=\sigma_0(f_0)$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 1.2.4　若 $\sigma_0(f_0)\in C'(y)$，$\sigma_0(f)\in C'(y)$，证明与情况 1.2.3 相同，详证略.

情况 1.3　若 $d(w)=5$ 或 6，用与情况 1.2 相同的方法可证明存在 G 的一 7-VEFC，详证略.

情况 2　w 为满足引理 2 中情况(2)的点.

情况 2.1　若 $d(w)=3$，考虑图：$G_0=G-\{u_1,u_2\}+\{wx,wy\}$. 其中 x，y，u_1 和 u_2 含义与引理 2 中情况(2)相同. 设 u 为与 w 相邻的内点，f (f') 不仅表示 G_0 的边界上含有边 xw (yw) 的内面，而且表示 G 的边界上含有边 $u_1x(u_2y)$ 的内面. 则 G_0 仍为伪-Halin 图且 $|V(G_0)|=p-2<p$，由引理 1 可设 $\Delta(G_0)=6$. 由归纳假设，存在 G_0 的一 7-VEFC σ_0. 现在 σ_0 的基础上构造 G 的一 7-VEFC σ. 记

$$Y=(V(G)\cup E(G)\cup F(G))\backslash\{u_1,u_2,u_1x,u_2y,u_2w,u_1w,u_1u_2w,u_1u_2\},$$

显然 $|C'(v)|=d(v)+1$，其中 $d(v)$ 表示 v 在 G_0 中的度. 因 σ_0 为 G_0 的 7-VEFC，因此

$$|\{\sigma_0(x),\sigma_0(y),\sigma_0(w),\sigma_0(xw),\sigma_0(yw),\sigma_0(f),\sigma_0(f)\}|\leqslant 6, \qquad (**)$$

即集合 $\{x,y,w,xw,yw,f,f\}$ 中仅有两个元素在 σ_0 下的色相同(显然不可能有多个相同).

情况 2.1.1　若 $\sigma_0(f_0)\neq\sigma_0(uw)$. 令 $\sigma(u_1u_2)=\sigma_0(w)$.

情况 2.1.1.1　若 $\sigma_0(xw)\neq\sigma_0(f')$. 令 $\sigma(u_1w)=\sigma_0(f')$, $\sigma(u_2w)=\sigma_0(f_0)$, $\sigma(u_1x)=\sigma_0(xw)$, $\sigma(u_2y)=\sigma_0(yw)$, $\sigma(u_1)\in C\backslash\{\sigma_0(w),\sigma_0(x),\sigma(u_1x),\sigma(u_1w),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f)\}$, $\sigma(u_2)\in C\backslash\{\sigma_0(w),\sigma_0(y),\sigma(u_2y),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f')\}$, $\sigma(u_1u_2w)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma_0(f),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f')\}$, $\sigma(y)=\sigma_0(y)$, $y\in Y$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.1.1.2　若 $\sigma_0(yw)\neq\sigma_0(f)$，用与情况 1.1.1 类似的方法可得 G 的一 7-VEFC σ.

情况 1.1.3　若 $\sigma_0(xw)=\sigma_0(f)$，且 $\sigma_0(yw)=\sigma_0(f')$. 令 $\sigma(u_1x)=\sigma_0(xw)$, $\sigma(u_1w)=\sigma_0(f_0)$, $\sigma(u_2y)=\sigma_0(yw)$, $\sigma(u_1)=\sigma(u_2w)\in C\backslash\{\sigma_0(x),\sigma_0(w),\sigma_0(f_0),\sigma(u_1x),\sigma(u_2y),\sigma_0(uw)\}$, $\sigma(u_2)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma_0(w),\sigma_0(y),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f'),\sigma(u_2y)\}$, $\sigma(u_1u_2w)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma(u_1w),\sigma_0(f),\sigma_0(f)\}$, $\sigma(y)=\sigma_0(y)$, $y\in Y$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.1.2　若 $\sigma_0(f_0)=\sigma_0(uw)$. 令 $\sigma(u_1x)=\sigma_0(w)$.

情况 2.1.2.1　若 $\sigma_0(xw)\neq\sigma_0(f')$.

情况 2.1.2.1.1　若 $\sigma_0(xw)\neq\sigma_0(f')$ 且 $\sigma_0(yw)=\sigma_0(f)$. 令 $\sigma(u_1x)=\sigma_0(xw)$, $\sigma(u_2y)=\sigma_0(yw)$, $\sigma(u_1w)=\sigma_0(f)$, $\sigma(u_1)=\sigma(u_2w)\in C\backslash(C'(w)\cup\{\sigma_0(f),\sigma_0(f)\})$, $\sigma(u_2)\in C\backslash\{\sigma_0(w),\sigma(u_1),\sigma_0(y),\sigma(u_2y),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f)\}$, $\sigma(u_1u_2w)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f),\sigma_0(f)\}$, $\sigma(y)=\sigma_0(y)$, $y\in Y$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.1.2.1.2　若 $\sigma_0(xw)=\sigma_0(f')$ 且 $\sigma_0(yw)\neq\sigma_0(f)$，与情况 1.2.1.1 类似，可得 G 的一 7-VEFC.

情况 2.1.2.1.3　若 $\sigma_0(xw)=\sigma_0(f')$ 且 $\sigma_0(yw)=\sigma_0(f)$. 令 $\sigma(u_1x)=\sigma_0(xw)$, $\sigma(u_2y)=\sigma_0(yw)$, $\sigma(u_1)=\sigma(u_2w)\in C\backslash\{C'(w)\cup\{\sigma_0(x)\}$, $\sigma(u_2)=\sigma(u_1w)\in C\backslash(C'(w)\cup\{\sigma_0(y),\sigma(u_1)\})$, $\sigma(u_1u_2w)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma_0(f),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f')\}$. $\sigma(y)=\sigma_0(y)$, $y\in Y$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.1.2.1.4　若 $\sigma_0(xw)\neq\sigma_0(f')$ 且 $\sigma_0(yw)\in\sigma_0(f)$. 结合式(**)和与 f_0 相邻相关联的元素，必有 $\sigma_0(x)=\sigma_0(y)$. 因此可令 $\sigma(u_1w)=\sigma_0(f')$, $\sigma(u_2w)=\sigma_0(f)$, $\sigma(u_1)=\sigma(u_2y)=\sigma_0(yw)$, $\sigma(u_2)=\sigma(u_1x)=\sigma_0(xw)$, $\sigma(y)=\sigma_0(y)$, $y\in Y$. 显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.2　若 $d(w)=4$，考虑图

$$G_0=G-\{u_1,u_2,u_3\}+\{xw,yw\}$$

由引理 2 和引理 5，可设 G_0 仍为 $\Delta(G_0)=6$ 的伪-Halin 图，且 $|V(G_0)|=p-3$．由归纳假设，存在 G_0 的一 7-VEFC σ_0．现在 σ_0 的基础上构造 G 的一 7-VEFC σ．

下面未说明的符号与情况 2.1 中同．未出现的元素的色与 σ_0 下的色相同．

情况 2.2.1　若 $\sigma_0(f_0)\neq\sigma_0(w)$ 且 $\sigma_0(u_2w)=\sigma_0(f_0)$．

情况 2.2.1.1　若 $\sigma_0(xw)\neq\sigma_0(f)$，在 σ_0 的基础上可构造 G 的一 7-VEFC σ 如下：$\sigma(u_2)=\sigma(u_1w)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_1u_2)=\sigma_0(w)$，$\sigma(ux)=\sigma_0(xw)$，$\sigma(u_3y)=\sigma_0(yw)$，$\sigma(u_3w)\in C\backslash\{\sigma_0(w),\sigma_0(uw),\sigma(u_1w),\sigma(u_3y),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f')\}$，$\sigma(u_2u_3)\in C\backslash\{\sigma(u_2),\sigma(u_1u_2),\sigma(u_2w),\sigma(u_3y),\sigma(u_3w)\}$，$\sigma(u_3)\in C\backslash\{\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma(y),\sigma(u_2u_3),\sigma(u_3w),\sigma_0(f_0)\}$，$\sigma(u_2u_3w)\in C\backslash\{\sigma(u_2),\sigma(u_3),\sigma_0(w),\sigma(u_2w),\sigma(u_2u_3),\sigma(u_3w)\}$，$\sigma(u_1u_2w)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma(u_2w),\sigma_0(f),\sigma(u_2u_3w)\}$．显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.2.1.2　若 $\sigma_0(yw)\neq\sigma_0(f)$，在 σ_0 的基础上类似的可得到 G 的一 7-VEFC σ．

情况 2.2.1.3　若 $\sigma_0(yw)=\sigma_0(f)$ 且 $\sigma_0(xw)=\sigma_0(f')$，在 σ_0 的基础上可构造 G 的一 7-VEFC σ 如下：$\sigma(u_2)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_1u_2)=\sigma_0(w)$，$\sigma(u_2u_3)=\sigma_0(f')$，$\sigma(u_1x)=\sigma_0(xw)$，$\sigma(u_3y)=\sigma_0(yw)$，$\sigma(u_1w)\in C\backslash\{\sigma_0(w),\sigma_0(uw),\sigma(u_1x),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f)\}$，$\sigma(u_3w)\in C\backslash\{\sigma_0(w),\sigma_0(uw),\sigma(u_3y),\sigma(u_1w),\sigma(u_2w),\sigma_0(f')\}$，$\sigma(u_1)\in C\backslash\{\sigma_0(x),\sigma_0(w),\sigma(u_2),\sigma(u_1x),\sigma(u_1w),\sigma_0(f_0)\}$，$\sigma(u_3)\in C\backslash\{\sigma_0(y),\sigma_0(w),\sigma(u_2),\sigma(u_2u_3),\sigma(u_3w),\sigma_0(f_0)\}$，$\sigma(u_2u_3w)\in C\backslash\{\sigma(u_2),\sigma(u_3),\sigma_0(w),\sigma(u_2u_3),\sigma(u_2w),\sigma(u_3w)\}$，$\sigma(u_1u_2w)\in C\backslash\{\sigma(u_1),\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma(u_1w),\sigma(u_2w),\sigma(u_2u_3w)\}$ 显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.2.2　若 $\sigma_0(f_0)=\sigma_0(uw)$，

情况 2.2.2.1　若 $\sigma_0(xw)\neq\sigma_0(f')$ 且 $\sigma_0(yw)=\sigma_0(f)$，构造 G 的 7-VEFC σ 如下：$\sigma(u_1x)=\sigma(u_3w)=\sigma(u_1wu_2)=\sigma_0(xw)$，$\sigma(u_2)=\sigma(u_1w)=\sigma_0(f')$，$\sigma(u_1u_2)=\sigma_0(w)$，$\sigma(u_3y)=\sigma(u_2u_3w)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_1)=\sigma(u_2u_3)\in C\backslash\{\sigma_0(x),\sigma_0(w),\sigma(u_2),\sigma(u_1x),\sigma_0(f_0),\sigma_0(f)\}$，$\sigma(u_3)=\sigma(u_2w)\in C\backslash\{\sigma_0(y),\sigma_0(w),\sigma(u_2),\sigma(u_3y),\sigma(u_1x),\sigma_0(f_0)\}$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.2.2.2　若 $\sigma_0(xw)=\sigma_0(f')$ 且 $\sigma_0(yw)\neq\sigma_0(f)$，与情况 2.2.1 类似可得到 G 的一 7-VEFC σ．

情况 2.2.2.3　若 $\sigma_0(xw)=\sigma_0(f')$ 且 $\sigma_0(yw)=\sigma_0(f)$，在 σ_0 的基础上构造 G 的一 7-VEFC σ 如下：$\sigma(u_1u_2)=\sigma_0(w)$，$\sigma(u_1x)=\sigma(u_2u_3)=\sigma(u_1u_2w)=\sigma_0(u_1x)$，$\sigma(u_3y)=\sigma(u_2u_3w)=\sigma_0(u_3y)$，$\sigma(u_2)=\sigma(u_1w)\in C\backslash C'(w)$，$\sigma(u_3)=\sigma(u_2w)\in C\backslash(C'(w)\cup\{\sigma(u_2),\sigma_0(y)\})$，$\sigma(u_3w)\in C\backslash(C'(w)\cup\{\sigma(u_1w),\sigma(u_3)\})$，$\sigma(u_1)\in C\backslash\{\sigma_0(y),\sigma_0(w),\sigma(u_2),\sigma(u_1x),\sigma_0(f),\sigma_0(f_0)\}$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.2.2.4　若 $\sigma_0(xw)\neq\sigma_0(f')$，且 $\sigma_0(yw)\neq\sigma_0(f)$，在 σ_0 的基础上构造 G 的 7-VEFC σ 如下：$\sigma(u_1x)=\sigma(u_1u_2w)=\sigma_0(xw)$，$\sigma(u_1u_2)=\sigma_0(w)$，$\sigma(u_2)=\sigma(u_3w)=\sigma_0(f)$，$\sigma(u_2u_3)=\sigma(u_1w)=\sigma_0(f')$，$\sigma(u_3y)=\sigma(u_2u_3w)=\sigma_0(yw)$，$\sigma(u_2w)\in C\backslash\{\sigma(u_2),\sigma_0(w),\sigma_0(uw),\sigma(u_1w),\sigma(u_1u_2w),\sigma(u_2u_3w)\}$，$\sigma(u_1)\in C\backslash\{\sigma_0(x),\sigma_0(w),\sigma(u_2),\sigma(u_1x),\sigma(u_1w),\sigma_0(f_0)\}$，

$\sigma(u_3) \in C\backslash\{\sigma_0(y),\sigma_0(w),\sigma(u_2),\sigma(u_3y),\sigma(u_2u_3),\sigma_0(f_0)\}$，显然 σ 为 G 的一 7-VEFC.

情况 2.3 若 $d(v)=5,6$，与情况 2.1，情况 2.2 类似，可证存在 G 的一 7-VEFC，详证略.

综合以上，由归纳原理可知结论成立.

类似的可证明如下定理：

定理 2 对 $\Delta(G)\geqslant 7$ 的伪-Halin 图 G 有 $\chi_C(G)=\Delta(G)+1$.

定理 3 对 $\Delta(G)\geqslant 6$ 的 Halin-图 G 有 $\chi_C(G)=\Delta(G)+1$.

由伪-Halin 图的定义即知定理 3 成立.

参考文献：

[1] HALIN R. *Studies on Minimally n-connected Graph* [C]. in:Comb. Math. and its applications (Proc. Conf. Oxfod, 1969), Academic Press, London.

[2] KRONK H V, MITCHEM J. *A seven-colour theorem on the sphere* [J]. Discrete Math., 1973, **5**: 253—260.

[3] ZHANG Zhong-fu, WANG Jian-fang, WANG Wei-fan, et al. *The Complete Chromatic Number of Some Planar Graphs* [J]. Scientia Sinica (Science in China), Ser. A, 1993, **4**: 395—400.

[4] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. The Macmillan Press Ltd., New York, 1976.

[5] HARARY F. *Graph Theory* [M]. Addison-Wesley, Reading, 1969.

[6] LIU Lin-zhong, ZHANG Zhong-fu. *On the properties and chromatic of pseudo Halin-Graph* [J]. J. of Lanzhou Railway Institute, 2001, **20**(4): 105—107.

On the Complete Chromatic Number of Pseudo-Halin Graphs with $\Delta(G)\geqslant 6$

LIU Lin-zhong[1], ZHANG Zhong-fu[2], WANG Jian-fang[3]

(1. Dept. of Traffic & Transportation Engineering, Lanzhou Railway Institute, Gansu 730070, China;

2. Inst. of Appl. Math., Lanzhou Railway Institute, Gansu 730070, China;

3. Inst. of Appl. Math., Academy Science of China, Beijing 100080, China)

Abstract: Let $G(V,E)$ be a 2-connected plane graph, f_0 a face without chord on its boundary (a cycle) and $d(v)\geqslant 3$ for every $v\in V(f_0)$. If the graph T obtained from $G(V,E)$ by deleting all edges on the boundary of f_0 is a tree of which all vertices $v\in V\backslash V(f_0)$ satisfy $d(v)\geqslant 3$, then $G(V,E)$ is called a Pseudo-Halin graph; $G(V,E)$ is said to be Halin-graph iif $d(v)=3$ for every $v\in V(f_0)$. In this paper, we proved that for any Pseudo-Halin graph with $\Delta(G)\geqslant 6$, have $\chi_C(G)=\Delta(G)+1$. Where $\Delta(G)$, $\chi_C(G)$ denote the maximum degree and the complete chromatic number of G, respectively. $V(f_0)$ denotes the vertices on the boundary of f_0.

Key words: Pseudo-Halin graph; complete coloring; complete chromatic number.