B 值随机变量阵列加权和的完全收敛性*

成风旸，　王岳宝
(苏州大学数学科学学院，江苏 苏州 215006)

摘　要：设$\{X_{ni}:1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$为行间独立的 B 值 r. v. 阵列，$g(x)$是指数为 $1/p$ 的正则变化函数，$r>0$、$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$为实数阵列，本文得到了使$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}P(\|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_{ni}\|>\varepsilon)<\infty$成立的条件，推广并改进了 Stout 及 Sung 等的著名结论.

关键词：完全收敛；行间独立的 B 值 $r.v.$ 阵列；正则变化函数；加权和.
分类号：AMS(2000) 60B12/CLC number：O211.4
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0665-05

1　引言与结果

[1]将著名的[2,定理 4.1.3]推广到 B 值 r. v. 阵列，得到了如下结果：

定理 A　设$(B,\|\cdot\|)$为实可分 Banach 空间，$p\geqslant 1$，$\{X_{ni}:1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$为行间独立的 B 值 r. v. 阵列，$X$ 为满足条件 $E|X|^{2p}<\infty$的实值 r. v.，$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1\}$为实数阵列. 假设以下诸式成立：

$$P(\|X_{ni}\|>x)\leqslant P(|X|>x),\quad \forall\, x>0,\quad \forall\, 1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant 1,\tag{1.1}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{ni}|=O(n^{-1/p}),\tag{1.2}$$

$$\log n\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{2}=o(1),\tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_{ni}\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty,\tag{1.4}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_{ni}\|>\varepsilon)<\infty,\quad \forall\,\varepsilon>0.\tag{1.5}$$

本文从三个方面将定理 A 推广到更加一般的场合，即研究了更一般的完全收敛性；讨论了权的控制函数为更一般的正则变化函数；取消了 $p\geqslant 1$ 的限制，将 p 的范围放宽为 $p>0$.

先回顾正则变化函数的概念与基本性质：

* **收稿日期**：2002-01-07
基金项目：国家自然科学基金(10271087)资助项目.
作者简介：成风旸(1962-)，男，硕士.

定义 1.1 非负函数 $g(x)$ 称为是指数为 p 的正则变化的，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(cx)}{g(x)}=c^p, \forall\, c>0$.

设 $p>0, g(x)$ 是指数为 p 的正则变化函数，令 $g^{-1}(x)=\inf\{y\in[0,+\infty): g(y)>x\}$，则由[3,Proposition1.5.15]知 $g^{-1}(x)$ 为指数为 $1/p$ 的正则变化函数.

定理 1.1 设 $r>0, p>0, g(x)$ 是 R^+ 上指数为 $1/p$ 的正则变化函数，且存在 $x_0\geqslant 0$ 使得 $g(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上单调增加. 设 $\{a_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ 为实数阵列，且当 $p\geqslant 2$ 时有(1.3)成立. 设 $\{X_{ni}: 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ 为行间独立的 B 值 r.v. 阵列，且当 $p\geqslant 1$ 时有(1.4)成立. 再设 X 为实值 r.v.，K 为正常数，满足以下条件：

$$P(\|X_{ni}\|>x)\leqslant KP(|X|>x),\quad \forall\, x>0, \forall\, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1, \tag{1.6}$$

$$E(g^{-1}(|X|))^{r+1}<\infty, \tag{1.7}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{ni}|\leqslant (g(n))^{-1},\quad n\geqslant 1. \tag{1.8}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}P(\|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_{ni}\|>\varepsilon)<\infty,\quad \forall\,\varepsilon>0. \tag{1.9}$$

注 1.1 显然，定理 A 是定理 1 当 $g(x)=x^{1/p}, r=1$ 的特殊情形. 当权函数给定时，正数 r 越小，矩条件就越弱，反之亦然；而当正数 r 给定时，权越小，矩条件就越弱，反之亦然. 故定理 1 揭示了正数 r，矩条件和权函数三者之间的关系.

注 1.2 显然，当 $0<p<2$ 时，易知(1.8)蕴涵(1.3). [4]曾举例说明(1.3)不能减弱，人们很自然地想到：当 $0<r<1$ 时，(1.3)能否减弱？下面的例子给出了否定的回答：

例 1.1 设 $\{X_{ni}: 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ 为行间独立的实值 r.v. 阵列，都服从标准正态分布. $a_{ni}=n^{-1/2}\log^{-1/2}n, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1$. 易知 $\log n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}^2=O(1), n\geqslant 1$，(1.3)不成立，不难证明对 $\forall\, r>0$，对充分小的 $\varepsilon>0$，(1.9)不成立.

推论 1.1 设 $r>0, 0<p\leqslant 2, g(x)$ 是 R^+ 上指数为 $1/p$ 的正则变化函数，存在 $x_0\geqslant 0$ 使 $g(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上单调增加，且当 $p=2$ 时有 $n(g(n))^{-2}\log n=o(1)$. 设 $\{X_{ni}: 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ 为行间独立的 B 值 r.v. 阵列，X 为实值 r.v.，K_1, K_2 为正常数，满足条件 $K_1P(|X|>x)\leqslant P(\|X_{ni}\|>x)\leqslant K_2P(|X|>x), \forall\, x>0, \forall\, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1$，及 $(g(n))^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}X_{ni}\xrightarrow{P}0$, $n\to\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{r-1}P(\|\sum\limits_{i=1}^{n}X_{ni}\|>\varepsilon g(n))<\infty, \forall\,\varepsilon>0$ 成立的充要条件为 $E(g^{-1}(|X|))^{r+1}<\infty$.

定理 1.2 设 $r, p, g(x)$ 同定理 1.1. 设 $\{a_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ 为满足(1.8)的实数阵列，且当 $p\geqslant 2$ 时有(1.3)成立. 设 $\{X_{ni}: 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ 为行间独立的 B 值 r.v. 阵列，且当 $(r+1)p>1$ 时有(1.4)成立. 再设存在 $\delta>0$，使有 $\sup\limits_{i,n}E(g^{-1}(|X_{ni}|))^{r+1}\log^{1+\delta}(|X_{ni}|\vee 1)<\infty$，则有(1.9)成立.

以下如无特别声明，均以 C 表示各可不同的正常数.

2 定理的证明

我们先给出一个引理：

引理 2.1 设 $\alpha>0$，$g(x)$ 是 R^+ 上指数为 α 的正则变化函数，且在 R^+ 上单调增加. 设 $\{X_i: i\geqslant 1\}$ 为 r. v. 列，且对某 $\delta>0$，有 $\sup\limits_i Eg(|X_i|)\log^{1+\delta}(|X_i|\vee 1)<\infty$，则存在实值 r. v. X 使得 $E(g(|X|))<\infty$ 及 $P(|X_i|>x)\leqslant P(|X|>x)$，$\forall\, x>0$，$\forall\, i\geqslant 1$.

证明 由 Karamata 定理知，存在 $x_1\in(1,+\infty)$，使当 $x\geqslant x_1$ 时总有：

$$1\geqslant M(\alpha+1)\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{tg(t)\log^{1+\delta}t}\geqslant\frac{M}{g(x)\log^{1+\delta}x}$$

令 X 为具有下列分布的 r. v.：

$$P(X>x)=\begin{cases}M(\alpha+1)\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{tg(t)\log^{1+\delta}t}, & x\geqslant x_1,\\ 1, \quad 0\leqslant x<x_1, & \end{cases}$$

则由 Markov 不等式，对 $\forall\, x\geqslant x_1$，$\forall\, i\geqslant 1$，有

$$[P(|X_i|>x)\leqslant\frac{Eg(|X_i|)\log^{1+\delta}(|X_i|\vee 1)}{g(x)\log^{1+\delta}x}\leqslant\frac{M}{g(x)\log^{1+\delta}x}\leqslant P(|X|>x),$$

而当 $0\leqslant x<x_1$ 时，$P(|X_i|>x)\leqslant 1=P(|X|>x)$，于是(i) 得证. 又显然有

$$Eg(|X|)=g(x_1)P(|X|=x_1)+\int_{x_1}^{+\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{xg(x)\log^{1+\delta}x}<\infty,$$

从而引理得证.

定理 1.1 的证明 不失一般性，不妨假设 $g(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调增加(即 $x_0=0$)，并令 $b_n=g(n)$，$n\geqslant 1$. 设 $\varepsilon>0$ 为任意给定正数. 取正数 σ 和正整数 N(容后待定)，令 $X'_{ni}=X_{ni}I(\|a_{ni}X_{ni}\|\leqslant b_n^{-\sigma})$，$T'_n=\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}X'_{ni}$，$X''_{ni}=X_{ni}I(\|a_{ni}X_{ni}\|>\varepsilon/N)$，$T''_n=\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}X''_{ni}$，$X'''_{ni}=X_{ni}-X'_{ni}-X''_{ni}$，$T'''_n=\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}X'''_{ni}$. 类似于[1]，只要证：

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1}P(\|T'_n\|>\varepsilon)<\infty, \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1}P(\|T''_n\|>\varepsilon)<\infty, \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1}P(\|T'''_n\|>\varepsilon)<\infty. \tag{2.3}$$

先证(2.2)：由 X''_{ni}的定义，我们有：

$$n^{r-1}P(\|T''_n\|>\varepsilon)\leqslant n^{r-1}\sum_{i=1}^n P(\|a_{ni}X_{ni}\|>\varepsilon/N)$$

$$\leqslant Cn^{r-1}\sum_{i=1}^n P(|X|>\varepsilon g(n)/N)\leqslant Cn^rP(g^{-1}(N|X|/\varepsilon)>n),$$

由(1.7)和正则变化函数的性质及[1，引理 3]，结合上式即得(2.2). 下证(2.3)：

$$n^{r-1}P(\|T'''_n\|>\varepsilon)\leqslant n^{r-1}P(\text{至少有 } N \text{ 个下标 } i \text{ 使得 } \|a_{ni}X_{ni}\|>b_n^{-\sigma})$$

$$\leqslant n^{r-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_N\leqslant n}P(\|a_{ni_1}X_{ni_1}\|>b_n^{-\sigma},\cdots,\|a_{ni_N}X_{ni_N}\|>b_n^{-\sigma})$$

$$\leqslant n^{r-1}(\sum_{i=1}^{n} P(\| a_{ni}X_{ni} \| > b_n^{-\sigma}))^N \leqslant Cn^{r-1}(nP(|X| > b_n^{-\sigma+1})^N.$$

由于 $(g^{-1}(x))^{r+1}$ 是指数为 $(r+1)p$ 的正则变化函数，任取 $v \in (p,(r+1)p)$，则由(1.7)知 $E|X|^v < \infty$，从而由 Markov 不等式有：$n^{r-1}P(\| T''_n \| > \varepsilon) \leqslant C(E|X|^v)^N n^{r-1}(nb_n^{v(\sigma-1)})^N$. 注意到 $g(x)$ 是指数为 $1/p$ 的正则变化函数及 $b_n = g(n)$，于是，取 N 充分大，$\sigma_1 > 0$ 充分小，使得 $r-1+(1+(\sigma_1-1)v/p)N < -1$，则当 $0 < \sigma \leqslant \sigma_1$ 时(2.3)成立.

最后证(2.1)，由 Markov 不等式及[1，引理 1]，对 $t=(r+1)\log n/\varepsilon$，有

$$n^{r-1}P(\| T'_n \| > \varepsilon) \leqslant n^{r-1}e^{-t\varepsilon}E\exp(t\| T'_n \|)$$

$$\leqslant \exp\{-2\log n + \frac{(r+1)\log n}{\varepsilon}E\| T'_n \| + \frac{2((r+1)^2(\log n)^2}{\varepsilon^2} \times$$

$$\exp(\frac{2(r+1)\log n}{\varepsilon b_n^{\sigma}})\sum_{i=1}^{n} E\| a_{ni}X'_{ni} \|^2\}$$

类似于[1]的证明，为证(2.1)，我们只要证明以下二式成立：

$$E\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X'_{ni} \| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.4}$$

$$\log n\sum_{i=1}^{n} E\| a_{ni}X'_{ni} \|^2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.5}$$

先证(2.5)：当 $p\geqslant 2$ 时，由(1.7)有 $EX^2<\infty$，类似于[1]，由(1.3)即得(2.5). 当 $0<p<2$ 时，取 $v\in(p,(r+1)p)\wedge 2)$，则由(1.7)有 $E|X|^v<\infty$，从而有

$$\log n\sum_{i=1}^{n} E\| a_{ni}X'_{ni} \|^2 = \log n\sum_{i=1}^{n} E\| a_{ni}X'_{ni} \|^{2-v}\| a_{ni}X'_{ni} \|^v$$

$$\leqslant C\log n b_n^{-\sigma(2-v)}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^v E|X|^v \leqslant Cnb_n^{-\sigma(2-v)-v}\log n,$$

由 $1-(\sigma(2-v)+v)/p<0$ 即知(2.5)成立. 从而总有(2.5)成立.

下证(2.4)：当 $p\geqslant 2$ 时，类似于[1]的证明，我们有

$$E\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.6}$$

当 $1\leqslant p<2$ 时，取 $v\in(p,(r+1)p\wedge 2)$，由(1.7)有 $E|X|^v<\infty$，由[1，引理 2]得

$$E|\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \| - E\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \||^v \leqslant C\sum_{i=1}^{n} E\| a_{ni}X_{ni} \|^v \leqslant Cnb_n^{-v} \to 0, \quad n \to \infty,$$

结合(1.4)即得(2.6). 于是，当 $p\geqslant 1$ 时，取 $v\in(p,(r+1)p\wedge 2)$，则有

$$E\| T'_n \| = E\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(X_{ni} - X_{ni}I(\| a_{ni}X_{ni} \| > b_n^{-\sigma})) \|$$

$$\leqslant E\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \| + \sum_{i=1}^{n} E\| a_{ni}X_{ni} \| I(\| a_{ni}X_{ni} \| > b_n^{-\sigma})$$

$$\leqslant E\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \| + Cb_n^{\sigma(v-1)}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}|^v E|X|^v$$

$$\leqslant E\| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \| + Cnb_n^{\sigma(v-1)-v}, \tag{2.7}$$

取 $\sigma\leqslant\sigma_1$ 充分小使得 $1+(\sigma(v-1)-v)/p<0$，由(2.6)和(2.7)就得到(2.4).

当 $0<p<1$ 时,取 $v\in(p,(r+1)p\wedge 1)$,$\sigma=\sigma_1$, 则由(1.7)有 $E|X|^v<\infty$,从而有

$$\sum_{i=1}^{n} E\|a_{ni}X'_{ni}\| = \sum_{i=1}^{n} E\|a_{ni}X'_{ni}\|^{1-v}\|a_{ni}X'_{ni}\|^{v}$$

$$\leqslant Cb_n^{-\sigma(1-v)}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^v E|X|^v \leqslant Cnb_n^{-\sigma(1-v)-v} \to 0,$$

于是总有(2.4)成立. □

推论 1.1 的证明　充分性部分由定理 1.1 立得，必要性部分由[6, Proposition3.1]立得.

定理 1.2 的证明　由定理 1.1 和引理 1.1 立得.

参考文献:

[1] SUNG S H. *Complete convergence for weighted sums of arrays of rowwise independent B-valued random variables* [J]. Stochastic Anal. Appl., 1997, **15**: 255-267.

[2] STOUT W F. *Almost Sure Convergence* [M]. New York: Academic Press, 1974.

[3] BINGHAM N H, COLDIE C M, TEUGELS J L. *Regular Variation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[4] STOUT W F. *Some results on the complete and almost sure convergence of linear combinations of independent random variables and martingale differences* [J]. Ann. Math. Statist, 1968, **39**: 1549-1562.

[5] TAYLOR R L. *Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces* [M]. Lecture Notes in Math., 672, Berlin: Springer-Varlag, 1978.

[6] HU T C, ROSALSKY A, SZYNAL D. et al. *On complete convergence for arrays of rowwise independent random elements in Banach spaces* [J]. Stochastic Anal. Appl., 1999, **17**: 963-992.

[7] WANG Y B, SU C. *Strong limit theorems of weighted sums for NA sequences with different distributions and its application in linear models* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1998, **21**: 571-578. (in Chinses).

Complete Convergence for Weighted Sums of Arrays of B-Valued Random Variables

CHENG Feng-yang,　　WANG Yue-bao

(School of Mathematic Science, Suzhou Univ., Jiangsu 215006, China)

Abstract: Let $\{X_{ni}: 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ be an array of rowwise independent B-valued random variables, and let $g(x)$ be a regular varying function with index $1/p\,(p>0)$. Let $\{a_{ni}: 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ be an array of real numbers. Let $r>0$. The sufficient conditions such that $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}P(\|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_{ni}\|>\varepsilon)<\infty$ are obtained. The wellknown results by Stout and Sung etc. are extended.

Key words: array of rowwise independent B-valued random variables; complete convergence; regular varying function; weighted sum.