第 24 卷第 4 期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 4
2004年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2004

可交换随机变量序列的随机极限定理*

赵 月 旭
(杭州电子科技大学信息与数学科学系, 浙江 杭州 310018)

摘 要:本文讨论了可交换随机变量序列$\{X_n:n\geqslant1\}$的极限定理,得到了可交换随机变量序列的随机强大数律及加权和定理,并推广了文[4]中的结果.

关键词:可交换随机变量序列; 强大数律; 加权和.
分类号:AMS(2000) 60F15/CLC number: O211.4
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2004)04-0670-05

1 引 言

可交换性概念最早由 De Finetti 提出,称随机变量有限列$\{X_n:n\geqslant1\}$是可交换的,如果$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布是置换不变的,即对$(1,2,\cdots,n)$的每一个置换π,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\overset{D}{=}(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots,X_{\pi(n)})$. 随机变量无限列是可交换的,如果其中任何有限子集都是可交换的. 下面先给出体现可交换随机变量序列与独立同分布序列关系最基本的结果 ——De Finetti 定理[1]:

定理 A 给定可交换随机变量序列$\{X_n:n\geqslant1\}$, 则在$\mathscr{F}$的子集构成的 Borel σ- 代数上,存在唯一的概率测度μ,使得对任意的$B\in\beta(R)$, 任意的可测函数$g:R^n\to R(n\geqslant1)$,有

$$P(g(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in B)=\int_{\mathscr{F}}P_F(g(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in B)\mathrm{d}\mu(F),$$

其中$P_F(g(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in B)$是在$\{X_n:n\geqslant1\}$是独立的,共同分布为$F$的假设下,事件$\{g(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in B\}$的概率,$\mu$是对应于$\{X_n:n\geqslant1\}$的 De Finetti 概率测度,$\mathscr{F}$是$R$上全体分布函数构成的集合.

可交换随机变量序列的极限性质曾引起人们的广泛关注,Blum, Chernoff, Rosenblatt 和 Teicher[2] 利用 De Finetti 定理获得了按行可交换随机变量无限组列中心极限定理的一些结果,Patterson 和 Taylor[3] 在一定的矩条件下,利用 De Finetti 定理获得了可交换随机变量三角组列的强大数律,Taylor 和 Hu[1]于 1987 年给出了可交换随机变量序列如下的强大数律:

定理 B 设$\{X_n:n\geqslant1\}$是可交换随机变量序列,且$E_F|X_1|<\infty$,μ-a.s.,则

* **收稿日期**:2002-01-28
基金项目:校科学研究基金资助项目(KYF091504024)
作者简介:赵月旭(1976-),男,硕士,讲师.

$$\mu(F:E_F X_1=0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0 \quad \text{a.s.}.$$

李应富[4] 改进并推广了[1]中的结果，本文将[4]中的结果做了进一步的推广，得到了随机强大数律和随机加权和定理，我们在文中将恒设$\{X_n: n\geqslant 1\}$是可交换的，$\{U_n: n\geqslant 1\}$是取正整数值的随机变量，$U_n\uparrow +\infty$，$\{X_n: n\geqslant 1\}$和$\{U_n:n\geqslant 1\}$定义在同一概率空间上，且相互独立，μ是$\{X_n:n\geqslant 1\}$所对应的 De Finetti 概率测度，$S_{U_n}=\sum_{i=1}^{U_n} X_i$.

2　主要结果

定理 2.1　设$\{X_n:n\geqslant 1\}$，$\{U_n:n\geqslant 1\}$如上所定义，则

(i) 当$0<p<1$时，$\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}\xrightarrow{\text{a.s.}}0 \Leftrightarrow \mu(F:E_F|X_1|^p<\infty)=1$；

(ii) 当$1\leqslant p<2$时，$\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}\xrightarrow{\text{a.s.}}0 \Leftrightarrow \mu(F:E_F|X_1|^p<\infty, E_F X_1=0)=1$.

定理 2.2　设$\{X_n:n\geqslant 1\}$，$\{U_n:n\geqslant 1\}$如上所定义，$\{\frac{U_n}{n}\}$随机有界，即存在$M>0$，使得$P(\frac{U_n}{n}>M)=0$，则$E_F|X_1|^\alpha<\infty, \alpha\in(0,2)$，$\mu$-a.s. 的充要条件是：对任意满足$P(\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}^2<\infty)=1$的实数列$\{a_{nk}\}$，有$U_n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k\xrightarrow{\text{a.s.}}0$.

定理 2.3　设$\{X_n:n\geqslant 1\}$，$\{U_n:n\geqslant 1\}$如上所定义，$\{\frac{U_n}{n}\}$随机有界，若存在随机变量X，使得$P(|X_n|\geqslant x)\leqslant P(|X|\geqslant x)(\forall\, x>0)$且$E|X|^\alpha<\infty, \alpha\in(0,2)$，$\{a_{nk}\}$是实数列，当$k\geqslant U_n$时，$a_{nk}=0$，如果$\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}^2=O(U_n^{-2/\alpha})$，那么有$\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k\xrightarrow{\text{a.s.}}0$.

3　主要结果的证明

为证以上定理，先给出下面的引理和命题：

引理 3.1[5]　设$\{X_n:n\geqslant 1\}$为一随机变量序列，X为一随机变量，x取值于$[0,+\infty)$，如果$P(|X_n|\geqslant x)\leqslant P(|X|\geqslant x)$，且$E|X|^r<\infty, r\in(0,2)$，则$\frac{1}{n^{1/r}}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{\text{a.s.}}0$.

命题 3.2　设随机变量序列$\{X_n:n\geqslant 1\}$的律一致地以一个随机变量X为界，即对所有的n和$x\geqslant 0$，有$P(|X_n|\geqslant x)\leqslant P(|X|\geqslant x)$. $\{U_n:n\geqslant 1\}$，$\{X_n:n\geqslant 1\}$如上所定义，且$\{\frac{U_n}{n}\}$随机有界，$\{a_{nk}:1\leqslant k\leqslant U_n\}$为实数列，使得$P(\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}^2<\infty)=1$，若还有$E|X|^\alpha<\infty$，$\alpha\in(0,2)$，则

$$U_n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k\to 0, \quad \text{a.s.}.$$

命题 3.2 的证明　运用 Cauchy 不等式，再注意到 $P(\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}^2<\infty)=1$，所以存在 $A>0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}(|U_n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k|^2)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}^2\sum_{k=1}^{U_n}\frac{X_k^2}{U_n^{2/\alpha}}\leqslant A\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{U_n}\frac{X_k^2}{U_n^{2/\alpha}}.$$

我们只需证 $\sum_{k=1}^{U_n}\frac{X_k^2}{U_n^{2/\alpha}}\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，由于 $\{\frac{U_n}{n}\}$ 随机有界，故存在 $M>0$，使得 $P(\frac{U_n}{n}>M)=0$. 因而我们可得

$$\begin{aligned}P(\sup_{n\geqslant m}|\frac{\sum_{k=1}^{U_n}X_k^2}{U_n^{2/\alpha}}|>\varepsilon)&\leqslant P(\sup_{n\geqslant m}|\frac{\sum_{k=1}^{U_n}X_k^2}{U_n^{2/\alpha}}|>\varepsilon,\frac{U_n}{n}\leqslant M)+P(\frac{U_n}{n}>M)\\&\leqslant P(\sup_{n\geqslant m}\max_{i\leqslant nM}|\frac{\sum_{k=1}^{i}X_k^2}{i^{2/\alpha}}|>\varepsilon)+P(\frac{U_n}{n}>M)\\&\leqslant P(\sup_{i\geqslant 1}|\frac{\sum_{k=1}^{i}X_k^2}{i^{2/\alpha}}|>\varepsilon)+P(\frac{U_n}{n}>M).\end{aligned}$$

又 $\{X_k^2\}$ 的律一致地以 X^2 的律为界，$0<\frac{\alpha}{2}<1$，且 $E(X^2)^{\alpha/2}=E|X|^\alpha<\infty$，由引理 3.1 易得 $n^{-2/\alpha}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，所以

$$P(\sup_{i\geqslant 1}|\frac{\sum_{k=1}^{i}X_k^2}{i^{2/\alpha}}|>\varepsilon)\to 0.$$

综上可知本命题成立.

定理 2.1 的证明　注意到，对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}P(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon,\text{i.o.})&=P(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon))\\&=\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}P(\bigcup_{n=m}^{k}(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon))\\&=\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathscr{F}}P_F(\bigcup_{n=m}^{k}(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon))\mathrm{d}\mu(F)\\&=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathscr{F}}P_F(\bigcup_{n=m}^{\infty}(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon))\mathrm{d}\mu(F)\\&=\int_{\mathscr{F}}P_F(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon,\text{i.o.})\mathrm{d}\mu(F).\end{aligned}$$

所以 $P(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon,\text{i.o.})=0\Leftrightarrow P_F(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon,\text{i.o.})=0$，$\mu$-a.s.. 而 $P_F(|\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}|>\varepsilon,\text{i.o.})$ 是在 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 为独立的，共同分布为 F 的假设下的概率，由 Marcinkiewicz-Zygmund 强大数律可知(i)，(ii) 成立.

由以上定理，不难得到下述推论：

推论 3.3 设$\{X_n:n\geqslant 1\}$，$\{U_n:n\geqslant 1\}$如上所定义，则$\frac{S_{U_n}}{U_n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0\Leftrightarrow\mu(F:E_FX_1=0)=1$.

推论 3.3 的证明 若$\frac{S_{U_n}}{U_n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0$成立，则由定理 2.1 中的(ii) 可知

$$\mu(F:E_F|X_1|<\infty,E_FX_1=0)=1.$$

所以，我们可得$\mu(F:E_FX_1=0)=1$；反之，若$E_FX_1=0$，则显然有$E_FX_1<\infty$，μ-a.s.，由定理 2.1 中的(ii)，可得$\frac{S_{U_n}}{U_n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0$.

推论 3.4 设$\{X_n:n\geqslant 1\}$，$\{U_n:n\geqslant 1\}$如上所定义，$E|X_1|^p<\infty$ $(1\leqslant p<2)$，且$EX_1X_2<\infty$，则$\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}\xrightarrow{\text{a.s.}}0\Leftrightarrow EX_1X_2=0$.

推论 3.4 的证明 因为$EX_1X_2=\int_{\mathscr{F}}E_F(X_1X_2)\mathrm{d}\mu(F)=\int_{\mathscr{F}}(E_FX_1)^2\mathrm{d}\mu(F)<\infty$，所以有$E_FX_1<\infty$，$\mu$-a.s.，又因为$EX_1X_2=0\Leftrightarrow E_FX_1=0$，$\mu$-a.s.，故要证上述结论，只需证明$\frac{S_{U_n}}{U_n^{1/p}}\xrightarrow{\text{a.s.}}0\Leftrightarrow E_FX_1=0$，$\mu$-a.s.. 由定理 2.1 不难得到此结论成立.

定理 2.2 的证明 若$E_F|X_1|^\alpha<\infty$，μ-a.s.，则由命题 3.2 知，对μ-a.s. 的F，有$P_F(|U_n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k|>\varepsilon,\text{i.o.})=0$，$\mu$-a.s.，所以对任意的$\varepsilon>0$，有

$$P(|U_n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k|>\varepsilon,\text{i.o.})=\int P_F(|U_n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k|>\varepsilon,\text{i.o.})\mathrm{d}\mu(F)=0.$$

因此可得$U_n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{U_n}a_{nk}X_k\xrightarrow{\text{a.s.}}0$；反之，记

$$a_{nk}=\begin{cases}0, & k\neq U_n;\\ 1, & k=U_n.\end{cases}$$

不难得到$U_n^{-1/\alpha}X_{U_n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0$，即$P(U_n^{-1/\alpha}|X_{U_n}|>1,\text{i.o.})=0$. 于是对$\mu$-a.s. 的$F$，有

$$P_F(|X_{U_n}|^\alpha>U_n,\text{i.o.})=0,\quad \mu\text{-a.s.},$$

由 Borel-Cantelli 引理

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_F(|X_{U_n}|^\alpha>U_n)<\infty,\quad \mu\text{-a.s.},$$

又$\sum_{n=1}^{\infty}P_F(|X_1|^\alpha>U_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P_F(|X_{U_n}|^\alpha>U_n)$，故$E_F|X_1|^\alpha<\infty$，$\mu$-a.s.，综上定理得证.

定理 2.3 的证明 记$X_i'=X_i\mathrm{I}(|X_i|\leqslant i^{1/\alpha})$，$X_i''=X_i\mathrm{I}(|X_i|>i^{1/\alpha})$. 我们只需证明$\sum_{i=1}^{U_n}a_{ni}X_i'\xrightarrow{\text{a.s.}}0$和$\sum_{i=1}^{U_n}a_{ni}X_i''\xrightarrow{\text{a.s.}}0$.

(1) 先证$\sum_{i=1}^{U_n}a_{ni}X_i'\xrightarrow{\text{a.s.}}0$. 令$Y_{U_n}=\sum_{i=1}^{U_n}a_{ni}X_i'$，由 Cauchy 不等式及$\sum_{i=1}^{U_n}a_{ni}^2=O(U_n^{-2/\alpha})$，可得

$$|Y_{U_n}|^2=|\sum_{i=1}^{U_n}a_{ni}X_i'|^2\leqslant\sum_{i=1}^{U_n}a_{ni}^2\sum_{i=1}^{U_n}X_i'^2\leqslant CU_n^{-2/\alpha}\sum_{i=1}^{U_n}X_i'^2.$$

所以 $\limsup_{n\to\infty}|Y_{U_n}|^2 \leqslant C\limsup_{n\to\infty} U_n^{-2/\alpha}\sum_{i=1}^{U_n} X_i'^2$，以下的证明类似于命题 3.2 之证法.

(2) 再证 $\sum_{i=1}^{U_n} a_{ni}X_i'' \xrightarrow{a.s.} 0$. 由于 $E|X|^\alpha < \infty$，所以 $\sum_{i=1}^{\infty} P(|X| > i^{1/\alpha}) < \infty$，由 Borel-Cantelli 引理易得 $P(|X| > i^{1/\alpha}, \text{i.o.}) = 0$，因而 $P(|X_i| > i^{1/\alpha}, \text{i.o.}) = 0$，所以有

$$U_n^{-2/\alpha}\sum_{i=1}^{U_n} X_i''^2 = U_n^{-2/\alpha}\sum_{i=1}^{U_n} X_i^2 I(|X_i| > i^{1/\alpha}) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

因此，由 Cauchy 不等式可得

$$|\sum_{i=1}^{U_n} a_{ni}X_i''|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{U_n} a_{ni}^2 \sum_{i=1}^{U_n} X_i''^2 \leqslant CU_n^{-2/\alpha}\sum_{i=1}^{U_n} X_i''^2 \xrightarrow{a.s.} 0.$$

其中 C 为正常数，综合以上可知此定理成立.

参考文献：

[1] TAYLOR R L, HU T C. *On laws of large number for exchangeable random variables* [J]. Stoch. Anal. Appl., 1987, **5**: 323—334.

[2] BLUM J R, CHERNOFF H, ROSENBLATT M. et al. *Central limit theorems for exchangeable processes* [J]. Canadian J. of Mathematics, 1958, **10**(2): 222—229.

[3] PATTERSON R F, TAYLOR R L. *Strong laws of large numbers for triangular arrays of exchangeable random variables* [J]. Stoch. Anal. Appl., 1985, **3**(2): 171—187.

[4] 李应富. 可交换随机变量序列的极限定理 [J]. 应用概率统计, 1990, **6**(3): 279—283.
LI Ying-fu. *Limit Theorems of exchangeable random variables* [J]. Chinese J. of Applied Probaility and Statistics, 1990, **6**(3): 279—283.

[5] LOEVE M. *Probability Theory* [M]. New York: D. Van Nostrand Company, Inc. 1955.

Random Limit Theorems of Exchangeable Random Variable Sequences

ZHAO Yue-xu

(Dept. of Math., Hangzhou Dianzi University, Zhejiang 310018, China)

Abstract: In this paper, we discuss limit theorems of exchangeable random variables $\{X_n: n \geqslant 1\}$, obtain random strong law and weighted sums theorems of exchangeable random variable sequences, and extend the results of paper [4].

Key words: exchangeable random variables; strong law of large numbers; weighted sums.