第 24 卷第 4 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 4
2004年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2004

半素环上的右理想及其微商*

张　秀　英
(吉林大学数学研究所，吉林 长春 130023)

摘　要：R 是半素环，d 是 R 的微商，ρ 是 R 的右理想，a 是 R 中元素，如果对于 ρ 中的所有元素 x，都有 $ad(x)^n=0$，其中 n 是一个固定的正整数，那么必有 $a\rho d(\rho)\rho=0$.

关键词：微商；GPI；素环；半素环.
分类号：AMS(2000) 16U80,16W25/CLC number：O153.3
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0675-04

在文[4]中，I. N. Herstein 证明了如下结论：R 是素环，d 是 R 的一个内导子，如果对于任意的 $x\in R$ 及正整数 n，有 $d(x)^n=0$，则 $d=0$. 文[8]和[12]将这一结果由素环上的内导子推广到了半素环上的任意微商. 在文[3]中，Lanski 讨论了在素环的某些 Lie 理想上带有幂零值的微商，并且 Lanski 在文[2]中证明了如下结论，即设 R 是素环，d 是 R 的微商，ρ 是 R 的一个右理想，若对任意的 $x\in\rho$，都使得 $d(x)^n=0$，其中 n 是一个固定的正整数，那么必有 $d(\rho)\rho=0$.

M. Brèar 在文[1]中给出了微商幂零性的一个推广，亦即，他证明了如下结论：R 是半素环，且为 $(n-1)!$—— 挠自由环，d 是 R 的微商，$a\in R$，如果对于任意的 $x\in R$，有 $ad(x)^n=0$，其中 n 是一个固定正整数，则 $ad(R)=0$. T. K. Lee 和 J. S. Lin 在文[6]中研究了 Brešar 的结果在 Lie 理想条件下的情形，同时去掉了 R 是 $(n-1)!$—— 挠自由的假设条件.

本文考虑 Brešar 的结果在右理想条件下的情形，并证明了如下结论：

主要定理　设 R 为半素环，带有非零微商 d，ρ 是 R 的非零右理想，如果对于任意的 $x\in\rho$，有 $ad(x)^n=0$，其中 n 是一个固定的正整数，那么必有 $a\rho d(\rho)\rho=0$.

主要定理的证明实际上是素环的一类特殊情况，因此我们首先证明以下结论.

定理 1　设 R 为素环，d 是微商，ρ 是 R 的一个非零右理想，$a\in R$. 如果 $ad(x)^n=0$，对任意的 $x\in\rho$ 都成立，其中 n 是一个固定正整数，那么必有 $a\rho=0$ 或者 $d(\rho)\rho=0$.

证明　首先明确记号，用 Q 和 C 分别表示素环 R 的对称 Martindale 商环和扩展形心[13]. 我们将按两种基本情形进行讨论如下.

情形 1　假设 R 不满足任何广义多项式恒等式(后文均简记作 GPI).

* **收稿日期**：2002-12-09
作者简介：张秀英(1967-)，副教授.

对于任意的 $t\in\rho$,根据题设条件我们有

$$ad(tx_1+\cdots+tx_n)^n=0,\quad \forall\, x_1,\cdots,x_n\in R,$$

对上式进行完全线性化得出

$$\sum_{\sigma\in S_n} ad(tx_{\sigma(1)})\cdots d(tx_{\sigma(n)})=0,\quad \forall\, x_1,\cdots,x_n\in R,$$

其中 S_n 是 n 阶置换群. 因为 R 不是 GPI 环,所以我们得出结论

$\sum_{\sigma\in S_n} ad(tx_{\sigma(1)})\cdots d(tx_{\sigma(n)})$ 一定是一个平凡恒等式,因此,根据文[9],有

$$ad(tx_1)\cdots d(tx_n)=0,\quad \forall\, x_1,\cdots,x_n\in R,$$

而由此可立刻得出 $at=0$ 或 $d(tx)t=0$,任意的 $x\in R$.

现在假设 $at\neq 0$,那么必有 $d(tx)t=0$,对任意的 $x\in R$ 成立. 于是有 $(d(t)x+td(x))t=0$,对任意的 $x\in R$. 如果 d 不是 Q 上的内导子,利用 Kharchenko 在文[7]中的定理,则必有 $(d(t)x+ty)t=0$,对任意的 $x,y\in R$. 特别地,对于任意的 $y\in R$,有 $tyt=0$,从而有 $t=0$,产生矛盾. 因此,我们只需假设 d 是 Q 上的内导子,则必存在元素 $b\in Q$,使得 $d(x)=[b,x]$,任意的 $x\in R$. 由文[5],我们有 $[b,tx]t=0$,任意的 $x\in Q$. 也就是 $btxt=txbt$,任意的 $x\in Q$. 根据[10, Lemma],对于所有的 $t\in\rho$,存在 $\lambda\in C$,使得 $bt=\lambda t$,同时亦有 $at\neq 0$. 对于每个元素 $t\in\rho$,于是或者 $at=0$ 或者 $(b-\lambda)t=0$. 于是有 $a\rho=0$ 或者 $(b-\lambda)\rho=0$. 而 $(b-\lambda)\rho=0$ 时,则有 $[b,\rho]\rho=0$,此即为所求. 因此,我们以下考虑 R 是 GPI 环的情形.

情形 2　假设 R 满足一个非零的 GPI.

根据 Martindale 的定理[14],RC 是一个强本原环,根据[11,命题],有 $\rho C=eRC$,其中 e 是 H 中的幂等元,H 是 RC 的基座. 根据假设我们有 $ad(tr)^n=0$,任意的 $t\in\rho,r\in R$,从而有 $a(d(t)r+td(r))^n=0$,任意的 $t\in\rho,r\in R$. 如果 d 不是 Q 上的内导子,[7,Theorem2]和[5,Theorem2]的一个直接应用就可以得 $a(d(t)r+ty)^n=0$,任意的 $t\in\rho,r,\ y\in Q$. 特别地,对所有的 $t\in\rho$,有 $at^n=0$,由[5,Theorem2]我们得出 $ax^n=0$,对于全部 $x\in\rho Q$ 都成立. 再由 $\rho C=eRC$,有 $ax^n=0$,任意的 $x\in eRC$,进一步地,有 $ax^n=0$,任意的 $x\in eR$,因为 e 是 R 的幂等元,所以有 $ae=0$,于是有 $a\rho C=aeRC=0$. 因此有 $a\rho=0$,得证.

现在假设 d 是 Q 上的内导子,即存在一个元素 $b\in Q$,使得对任意的 $x\in R$,都有 $d(x)=[b,x]$. 根据题设有 $a[b,x]^n=0$,任意的 $x\in\rho$,由文[5,Theorem2]有 $a[b,x]^n=0$,任意的 $x\in\rho Q$. 特别地,有 $a[b,x]^n=0$,任意的 $x\in\rho C=eRC$,亦即 $a[b,ex]^n=0$,任意的 $x\in R$. 更进一步地,再次利用[5,Theorem2],我们有 $a[b,ex]^n=0$,任意的 $x\in Q$. 用 R 替代 Q,我们可以假设 $b\in R$,C 只是 R 的中心. 注意到 R 是一个中心闭的素环. 由于 R 满足一个非零的 GPI,再由 Martindale 的定理[14]知 R 是一个强本原环. 令 $_RV$ 是一个忠实的不可约左 R— 模,伴有除环 $D=End(_RV)$. 根据稠密性定理,R 稠密地作用在 V_D 上,可以断言 $ae\neq 0$. 事实上,当 $ae=0$ 时,有 $aeRC=a\rho C=0$,从而有 $a\rho=0$,正如所求. 对任意给定的元素 $v\in V$,我们断言,ev 和 bev 是 D— 相关的. 首先假设 $aev\neq 0$. 用反证法证明此结论. 假设 ev 和 bev 是 D— 无关的,由 R 在 $End(V_D)$ 上的稠密性知,R 中存在一个元素 x,使得 $xev=0,xbev=ev$,于是有 $0=a[b,ex]^nev=aev\neq 0$,产生矛盾. 故而 ev 和 bev 是 D— 相关的. 其次假设 $aev=0$. 因为 $ae\neq 0$,所以对于某个 $w\in V$,有 $aew\neq 0$,于是有 $ae(v+w)=aew\neq 0$. 根据第一种情况,我们有 $bew=ew\alpha$

及 $be(v+w)=e(v+w)\beta$，对于某些 $\alpha,\beta\in D$ 成立. 然而 ev 和 ew 显然是 D— 无关的，从而 R 中必存在一个元素 x，使得

$$xev=-v \text{ 及 } xew=v+w.$$

于是

$$0=a[b,ex]^n ew=\pm\, aew(\beta-\alpha)^n.$$

由此可推出 $\alpha=\beta$，且必有 $bev=ev\alpha$. 根据文[6]，我们知道 α 与 $v\in V$ 的选择无关，且 $\alpha\in Z(D)$，即 D 的中心. 因此有

$$[b,\rho C]\rho C\nu=[b,eRC]eRC\nu=0,\quad \forall\,\nu\in V,$$

故

$$[b,\rho C]\rho C=0.$$

特别地，有

$$[b,\rho]\rho=0.$$

正如所证，综上本定理证毕.

以下来证明主要定理

主要定理的证明 令 P 是 R 的素理想，使得 $\rho\not\subseteq P$，且令 $\overline{R}=R/P$. 首先假设 $d(P)\subseteq P$，则 d 诱导出 $\overline{R}$ 上的一个平凡微商 $\overline{d}$. 根据假设有，$\overline{a}\,\overline{d}(\overline{x})^n=0$，任意的 $\overline{x}\in\overline{\rho}$. 注意到 $\overline{\rho}$ 是 $\overline{R}$ 的右理想且 $\overline{\rho}\neq 0$，这是因为 $\rho\not\subseteq P$. 由定理 1 得 $\overline{a}\,\overline{\rho}=0$ 或 $\overline{d}(\overline{\rho})\overline{\rho}=0$，亦即 $a\rho\subseteq P$ 或 $d(\rho)\rho\subseteq P$.

其次假设 $d(P)\not\subseteq P$，则对任意的 $t\in\rho, x\in P$，有 $0=ad(tx)^n=a(d(t)x+td(x))^n$，进而在 $\overline{R}$ 中有 $\overline{a}(\overline{t}\,\overline{d(x)})^n=0$. 由此，在 $\overline{R}$ 中得到 $\overline{a}(\overline{t}\,\overline{d(xr)})^n=0$，任意的 $r\in R$. 这样在 $\overline{R}$ 中就有 $\overline{a}(\overline{t}\,\overline{d(x)}\,\overline{r})^n=0$. 令 $\overline{s}=\overline{t}\,\overline{d(x)}$，即 $\overline{a}(\overline{s}\,\overline{r})^n=0$，对任意的 $\overline{r}\in\overline{R}$. 如果 $\overline{a}\,\overline{s}\neq 0$，则 $\overline{s}\,\overline{R}$ 即为 GPI 素环 $\overline{R}$ 的右理想. 正如我们前面所观察到的，有 $\overline{a}\,\overline{e}=0$，其中 $\overline{e}$ 是 $\overline{R}$ 中的幂等元，且有 $\overline{e}\,\overline{R}\,\overline{C}=\overline{s}\,\overline{R}\,\overline{C}$，于是有 $\overline{a}\,\overline{s}\,\overline{R}=0$，此与 $\overline{R}$ 的素性相矛盾. 因此有 $\overline{a}\,\overline{s}=0$，亦即 $\overline{a}\,\overline{t}\,\overline{d(x)}=0$，任意的 $t\in\rho$，$x\in P$. 因为，$\overline{d(P)}\neq 0$，再由 $\overline{R}$ 的素性，我们有 $\overline{a}\,\overline{t}=0$，即 $a\rho\subseteq P$.

到目前为止，我们已经证明了对于 R 的任一素理想 P，或者 $a\rho\subseteq P$ 或者 $d(\rho)\rho\subseteq P$. 因此，对于 R 的每个素理想 P，有 $a\rho d(\rho)\rho\subseteq P$. 而由 R 的半素性，必有

$$a\rho d(\rho)\rho=0. \qquad \square$$

从主要定理，我们很容易得出如下推论

推论 ([6],Corollary) 设 R 为半素环，带有微商 d，$a\in R$. 如果 $ad(x)^n=0$，任意的 $x\in R$，其中 n 是一固定正整数，则 $ad(R)=0$.

证明 根据主要定理，有 $aRd(R)R=0$，从而 $aRd(R)=0$. 特别地，有 $ad(R)Rad(R)=0$，利用 R 的半素性，进而推出 $ad(R)=0$. $\square$

致谢 感谢牛凤文教授的帮助与指导.

参考文献：

[1] BREŠAR M. *A note on derivations* [J]. Math. J. Okayama Univ., 1990, **32**: 83—88.

[2] LANSKI C. *Derivation with nilpotent values on right ideals* [J]. J. Algebra, 1994, **22**: 1305—1320.

[3] LANSKI C. *Derivations with nilpotent values on Lie ideals* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1990, **108**: 31—37.

[4] HERSTEIN I N. *Center-like elements in prime rings* [J]. J. Algebra, 1979, **60**: 567—574.

[5] CHUANG C L. *GPIs having coefficients in Utumi quotient rings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, **103**: 723—728.

[6] LEE T K, LIN J S. *A result on derivations* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1996, **124**: 1687—1691.

[7] KHARCHENKO V K. *Differential identities of semiprime rings* [J]. Algebra and Logic, 1979, **18**: 58—80.

[8] GIAMBRUNO A, HERSTEIN I N. *Derivations with nilpotent values* [J]. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1981, **30**: 199—206.

[9] BREŠAR M, CHEBOTAR M A, ŠEMRL P. *On derivations of Prime rings* [J]. Communications in Algebra, 1999, **27**(7): 3129—3135.

[10] BREŠAR M. *Semiderivations of prime rings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1990, **108**: 859—860.

[11] LEE T K. *Power reduction property for generalized identities of one-sided ideals* [J]. Algebra Colloquium, 1996, **3**: 19—24.

[12] CHUNANG L O, LUH J L. *Semiprime rings with nilpotent derivations* [J]. Canad. Math. Bull., 1981, **24**: 415—421.

[13] BEIDAR K I, MARTINDALE III W S, MIKHALEV A V. *Rings with Generalized Identities* [M]. Marcel Dekker, Inc, New York-Basel-Hongkong, 1996.

[14] MARTINDALE 3rd W S. *Prime rings satisfying a generalized polynomial identity* [J]. J. Algebra, 1969, **12**: 576—584.

Right Ideals and Derivations of Semiprime Rings

ZHANG Xiu-ying

(Inst. of Math., Jilin University, Changchun 130023, China)

Abstract: Let R be a semiprime ring with derivation d and let ρ be a right ideal of R, $a\in R$. Suppose that $ad(x)^n=0$ for all $x\in\rho$, where n is a fixed positive integer, then $a\rho d(\rho)\rho=0$.

Key words: derivation; GPI; prime ring; semiprime ring.