第24卷第4期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 4
2004年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2004

von-Neumann 正则环与左 SF-环*

周海燕[1]， 王小冬[2]

（1. 南京大学数学系，江苏 南京 210093；2. 安徽工程科技学院应用数理系，安徽 芜湖 241000）

摘 要：环 R 称为左 SF-环，如果每个单左 R-模是平坦的. 众所周知，Von-Neumann 正则环是 SF-环，但 SF-环是否是正则环至今仍是公开问题. 本文主要研究左 SF-环是正则环的条件，证明了：如果 R 是左 SF-环且 R 的每个极大左(右)理想是广义弱理想，那么 R 是强正则环. 并且推广了 Rege[3]中的相应结果.

关键词：正则环；强正则环；SF-环；广义弱理想.

分类号：AMS(2000) 16E50/CLC number：O153.3

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)04-0679-05

本文中，R 均指含有单位元的结合环，R 上的模均指单式模. $J(R)$ 表示 R 的 Jacobsn 根. 如果 $J(R)=0$，则称 R 为半本原环[3]. 环 R 称为正则环[1]，如果对于 $\forall a\in R$，总存在 $b\in R$ 使得 $a=aba$. 如果 R 中不含有非零的幂零元，则称 R 是约化环[3]. 环 R 称为强正则环[2]，如果对于 $\forall a\in R$，总存在 $b\in R$ 使得 $a=a^2b$. 易知，强正则环是 von-Neumann 正则环. 环 R 称为左弱正则环[3]，如果对于 R 的任意左理想 I，均有 $I^2=I$. 类似的可以定义右弱正则环. 环 R 称为左(右)拟-*duo* 环[3]，如果 R 的每一个极大左(右)理想均是理想. 如果每一个单左(右)R-模是平坦的，则称 R 是左(右)SF-环[3]. 环 R 是 SF-环[3]，如果 R 既是左 SF-环又是右 SF-环. 我们知道正则环是 SF-环，但 Ramamurthi 在[1]中提出了 SF-环的研究以及 SF-环是否是正则环的问题，并且 Rege 在[3]中再次提出是否存在非正则的 SF-环的问题. 近几年来，SF-环被国内外许多学者所研究[3-7]，并且满足一定条件的左 SF-环的正则性已被解决. 在文献[3]中，M. B. Rege 证明了如果 R 是左 SF-环并且每个极大右理想是理想，那么 R 是强正则环. 在文献[7, Theorem 4]中，R. Yue Chi Ming 证明了每个极大左理想是理想的左 SF-环的强正则性，并且回答了文献[8]中提出的一个问题. 本文中，我们继续着这方面的工作，在文献[3]和[7]的基础上，利用广义弱理想代替理想，并证明了：如果 R 是左 SF-环并且每个极大左(右)理想是广义弱理想，那么 R 是强正则环. 根据下面命题 1，我们有效的推广了 Rege 和 R. Yue Chi Ming 的结果. 这些结果对于解决 SF-环是否是正则环这个公开问题具有重要意义.

设 R 是环，L 是 R 的任意左理想，如果对于 $\forall a\in L$ 总存在 $n>0$ 使得 $a^nR\subseteq L$，则称 L 是广义弱理想，简称GW-理想. K 是 R 的任意右理想，如果对于 $\forall a\in K$ 总存在 $n>0$ 使得 $Ra^n\subseteq K$，则称 K 是广义弱理想，简称 GW-理想. 易知：对于环 R，有

* 收稿日期：2002-04-23

基金项目：安徽省教育厅自然科学基金(2003kj166)，安徽省高校青年教师基金(2003jq107)资助项目.

$$\{\text{理想}\} \subseteq \{\text{GW-理想}\} \subseteq \{\text{单边理想}\}.$$

命题 1 存在环 R 使得$\{\text{理想}\} \subsetneq \{\text{GW-理想}\} \subsetneq \{\text{单边理想}\}$

证明 设

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 \\ 0 & \mathbf{Z} & \mathbf{Z}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

易知 R 是有单位元的结合环. 取

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R, \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$$

容易验证 $R\alpha$ 是诣零的左理想,βR 是诣零的右理想,但 $R\alpha, \beta R$ 都不是 R 的理想. 由于 $R\alpha, \beta R$ 都是诣零的,则 $R\alpha, \beta R$ 均是 GW-理想.

设

$$R_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{Z}_2 \\ 0 & \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix}$$

易知 R_1 是有单位元的结合环,取

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{Z}_2 \right\}, L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{Z} \right\}$$

容易验证 $K \leqslant R_R, L \leqslant {}_R R$,但由于对于 $\forall\, n > 0$,有

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \in K, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L,$$

且对于$\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_1$,有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin L$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin K,$$

故 K, L 都不是 R 的 GW-理想.

根据命题 1 知,广义弱理想有效地推广了理想概念,并且广义弱理想对于研究 SF-环的正则性是非常有用的,特别我们发现命题 2 是理想性质的真正推广.

命题 2 假定 I 是环 R 的理想,L 是 R 的左(右) 理想且 $I \subseteq L$,那么 L 是 R 的 GW-理想当且仅当 L/I 是 R/I 的 GW-理想.

证明 仅证左理想的情形,类似可证右理想的情形.

"$\Rightarrow$" 设 L 是 R 的左理想,对于 $\forall\, \bar{a} \in L/I$,由于 $I \subseteq L$,从而 $a \in L$. 又 L 是 GW-理想,则存在 $n > 0$ 使得 $a^n R \subseteq L$,于是 $\bar{a}^n(R/I) \subseteq L/I$,所以 L/I 是 R/I 的 GW-理想.

"$\Leftarrow$" 设 L/I 是 R/I 的 GW-理想,对于 $\forall\, a \in L$,则有 $\bar{a} \in L/I$,从而存在 $n > 0$ 使得$\overline{a^n R} = \bar{a}^n \bar{R} \subseteq L/I$ 其中 $\bar{R} = R/I$. 又 $I \subseteq L$,于是 $a^n R \subseteq L$,所以 L 是 R 的 GW-理想.

命题 3　设 R 是半本原环,如果 R 的极大左(右)理想是 GW- 理想,则 R 是约化环.

证明　仅证左的情形,类似可证右的情形. 假设存在 $a(\neq 0)\in R$ 使得 $a^2=0$,由于 R 是半本原环,从而 $a\notin \mathrm{J}(R)$. 于是存在 R 的极大左理想 M 使得 $a\notin M$,进而 $M+Ra=R$ 即 $Ma=a$. 因此存在 $b\in M$ 使得 $ba=a$. 由于 M 是 GW- 理想,且 $b\in M$,于是存在 $n>0$ 使得 $b^nR\subseteq M$. 特别地 $b^na\in M$,从而

$$b^{n-1}a=b^{n-1}(ba)=b^na\in M$$

依次下去,我们有 $a=ba\in M$. 这与 $a\notin M$ 相矛盾. 故 R 是约化环.

推论 4　设 R 是环,如果每个极大左(右)理想是 GW- 理想,则 $R/\mathrm{J}(R)$ 是约化环.

证明　由命题 2 与命题 3 易知.

引理 5[9]　如果 R 是左(右)弱正则环,那么 R 是半本原环.

引理 6[9]　假定 R 是约化环,那么 R 是左弱正则环当且仅当 R 是右弱正则环.

命题 7　如果环 R 的每个极大左(右)理想是 GW- 理想,那么 R 是左弱正则环当且仅当 R 是右弱正则环.

证明　"$\Rightarrow$"设 R 是左弱正则环,根据引理 5 知,R 是半本原环,由命题 3 及引理 6 知,R 是右弱正则环.

"$\Leftarrow$"类似可证.

由命题 1 知,[3,4.5],[3,4.4] 与[3,4.6] 是命题 3,推论 4 与命题 7 的直接结果,并且推论 4 对于下面定理的证明起着至关重要的作用. 我们首先引进几个重要的引理:

引理 8[3]　设 I 是环 R 的理想,如果 R 是左(右)SF- 环,则 R/I 是左(右)SF- 环.

引理 9[3]　设 R 是约化环,如果 R 是左(右)SF- 环,则 R 是强正则环.

引理 10[3]　设 R 是左(右)SF- 环,如果 R 是左拟 duo- 环,则 R 是强正则环.

定理 11　设 R 是左 SF- 环,且 R 的每个极大左理想是 GW- 理想,则 R 是强正则环.

证明　记

$$\bar{R}=R/\mathrm{J}(R)$$

根据引理 8 知,$\bar{R}$ 是左 SF- 环,由推论 4 知:$\bar{R}$ 是约化环. 又根据引理 9 知:$\bar{R}$ 是强正则环. 由此可知:$\bar{R}$ 是左拟 duo- 环. 于是 R 也是左拟 duo- 环. 根据引理 10 知,R 是强正则环.

定理 12　设 R 是左 SF- 环,且 R 的每个极大右理想是 GW- 理想,则 R 是强正则环.

证明　利用定理 11 相同的证明.

由定理 11,12,我们有:

推论 13　设 R 是环,如下条件等价:

(1) R 是强正则环;

(2) R 是正则环且 R 的极大左理想是 GW- 理想;

(3) 每一个左 R- 模是平坦的,且 R 的极大左理想是 GW- 理想;

(4) 每一个有限生成左 R- 模是平坦的,且 R 的极大左理想是 GW- 理想;

(5) 每一个循环左 R- 模是平坦的,且 R 的极大左理想是 GW- 理想;

(6) R 是左 SF- 环且 R 的极大左理想是 GW- 理想;

(7) R 是正则环且 R 的极大右理想是 GW- 理想;

(8) 每一个左 R- 模是平坦的,且 R 的极大右理想是 GW- 理想;

(9) 每一个有限生成左 R- 模是平坦的,且 R 的极大右理想是 GW- 理想;

(10) 每一个循环左 R- 模是平坦的,且 R 的极大右理想是 GW- 理想;

(11) R 是左 SF- 环且 R 的极大右理想是 GW- 理想;

由此可知:推论 13 真正推广了文[3,4.10]的部分结果与文[7,Theorem4].

值得我们注意的是:对于右 SF- 环,定理 11,12 及推论 13 中相应的结论仍成立.

引理 14[10] 假定 L 是 R 的左(右)理想,如果 L 是左(右)P- 内射的.则 R/L 是平坦左(右)R- 模.

定理 15 设 R 是环,下列条件是等价的:

1) R 是强正则环.

2) R 的每个极大左理想是 P- 内射的 GW- 理想.

3) R 的每个极大左理想是 P- 内射的且每个极大右理想是 GW- 理想.

4) R 的每个极大右理想是 P- 内射的 GW- 理想.

5) R 的每个极大右理想是 P- 内射的且每个极大左理想是 GW- 理想.

证明 (1)⇒(2),(1)⇒(3),(1)⇒(4),(1)⇒(5). 显然.

(2)⇒(1). 根据引理 14 与定理 11 知.

(3)⇒(1). 根据引理 14 与定理 12 知.

(4)⇒(1). 由于定理 12 对于右 SF- 环仍成立,则根据引理 14 可知.

(5)⇒(1). 由于定理 11 对于右 SF- 环仍成立,则根据引理 14 可知.

参考文献:

[1] RAMAMURTHI V S. *On the injectivity and flatness of certain cyclic modules* [J]. Proc. Ammer. Math. Soc., 1975, **48**(1): 21—25.

[2] GOODEARL K R. *Von Neumann Regular Rings* [M]. Kriegex Publishing Company, Florida, 199.

[3] REGE M B. *On von Neumann regular rings and SF-rings* [J]. Math. Japonica, 1986, **31**(6): 927—936.

[4] 章聚乐,杜先能. Von Neumann 正则环和 SF-环 [J]. 数学年刊, A 辑, 1993, **14**(1): 6—10.
ZHANG Ju-le, DU Xian-neng. *Von Neumann regular rings and SF-rings* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 1993, **14**(1): 6—10 (in Chinese)

[5] XIAO Yu-fei. *One sided SF-rings with certain chain conditions* [J]. Can. Math. Bull., 1994, **37**(2): 272—277.

[6] ZHANG Ju-le. *A note on Von Neuman regular rings* [J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 1998, **22**: 231—235.

[7] YUECHI MING R. *Annihilators and strongly rings* [J]. Rend. Sem. Fae. Sc. Vniv Cagoliari, 1987, **57**: 51—59.

[8] YUECHI MING R. *On von Neumann regular rings* Ⅷ [J]. Comment Math. Univ., Carolinae, 1982, **23**: 427—442.

[9] RAMAMURTHI V S. *Weakly regular rings* [J]. Can. Math. Bull., 1973, **16**: 317—322.

[10] ZHANG Ju-le. *Characterizations of strongly regular rings* [J]. Northeast Math. J., 1994, **10**(3): 359—364.

On von-Neumann Regular Rings and Left SF-Rings

ZHOU Hai-yan[1], WANG Xiao-dong[2]

(1. Dept. of Math., Nanjing University, Jiangsu 210093, China;

2. Dept. of Appl. Math. & Phys., Anhui University of Science and Technology, Wuhu 241000, China)

Abstract: A rings R is defined to be a left SF-ring if all simple left R-modules are flat. It is known that von Neumann regular rings are SF-rings. But the question whether a left SF-ring is necessarily regular remains open. In this paper, we study the regularity of left SF-rings which satisfy certain additional conditions. It is proved that R is strongly regular if R is a left SF-ring whose maximal left(right) ideals are generalized weak ideals. Furthermore, we generalize some results in [3].

Key words: regular ring; strongly regular ring; SF-ring; generalized weak ideal.