第 24 卷第 4 期
2004年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 24 No. 4
Nov. 2004

任意多个矩阵之积的$(T,S,2)$-逆的反序律*

陈 永 林

(南京师范大学数学与计算机科学学院，江苏 南京 210097)

摘　要：本文给出了任意 r 个矩阵之积的$(T,S,2)$-逆的反序律

$$(A_1A_2\cdots A_r)^{(2)}_{T_{r+1},S_{r+1}} = (A_r)^{(2)}_{T_r,S_r}\cdots(A_2)^{(2)}_{T_2,S_2}(A_1)^{(2)}_{T_1,S_1}$$

成立的充要条件.

关键词：$(T,S,2)$-广义逆；反序律.

分类号：AMS(2000) 15A09/CLC number：O151.21

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0684-05

1 引 言

文[1,5－9]研究了两个或三个矩阵之积的MP逆、加权MP逆、Drazin逆、$(T,S,2)$－广义逆的反序律. 本文研究任意多个矩阵之积的$(T,S,2)$逆的反序律. 已知，大多数常用的广义逆，如MP逆，加权MP逆，Drazin逆，约束MP逆，长方阵的Drazin逆，BD逆，广义BD逆[2]，以及加任意权的Eldén逆[3]，均是$(T,S,2)$逆的形式. 所以，本文研究的是任意多个矩阵之积的这些常用广义逆的反序律的一个统一形式；在乘积的矩阵因子数目与所用广义逆的种类两方面均扩充了以往的相关结果.

本文沿用文[1]中关于广义逆矩阵的记号.

引理 1[1]　设 $A\in C^{m\times n}$，T 与 S 分别是 C^n 与 C^m 的子空间. 则存在 $X\in C^{n\times m}$ 使得 $XAX=X$，$R(X)=T$，$N(X)=S$ 当且仅当

$$\dim T=\dim S^{\perp},\quad AT\oplus S=C^m,$$

此时 X 是唯一的，记作 $A^{(2)}_{T,S}$，读作"A 的$(T,S,2)$-逆".

引理 2[4]　设 $A^{(2)}_{T,S}$ 存在，则存在 $Y\in C^{n\times m}$ 使得

$$T=R(Y)\quad 与\quad S=N(Y),$$

这个 Y 还具有以下性质：

(a) $R(YAY)=R(YA)=R(Y)=T$，$N(YAY)=N(AY)=N(Y)=S$；

(b) 群逆$(YA)^{\#}$ 与$(AY)^{\#}$ 均存在，且有 $A^{(2)}_{T,S}=(YA)^{\#}Y=Y(AY)^{\#}$；

* 收稿日期：2002-01-07
作者简介：陈永林(1938-)，男，教授.

(c) $A_{T,S}^{(2)}=Y(YAY)^{(1)}Y$，其中$(YAY)^{(1)}$可任取.

引理 3 设 $M=\begin{bmatrix}H & G\\ F & K\end{bmatrix}$.若 $HH^{(1)}G=G, FH^{(1)}H=F$,则

$$\operatorname{rank}M=\operatorname{rank}H+\operatorname{rank}(K-FH^{(1)}G).$$

引理 4 $N(AB)=B^{(1)}(R(B)\cap N(A))\oplus N(B)$.

2 主要结果

本文以下总是记 $A_{r+1}\equiv A_1A_2\cdots A_r$.

先考虑所有的$(T_i,S_i,2)$-逆$(A_i)_{T_i,S_i}^{(2)}$总是存在的情形.

定理 1 设$(A_i)_{T_i,S_i}^{(2)}$总是存在的,并设Y_i使得$T_i=R(Y_i),S_i=N(Y_i),i=1,2,\cdots,r+1$.令

$$H_r=\begin{bmatrix}Y_1A_1Y_1 & & & 0\\ Y_2Y_1 & Y_2A_2Y_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & Y_rY_{r-1} & Y_rA_rY_r\end{bmatrix}, G\equiv\begin{bmatrix}0 & (-1)^rY_1\\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$F_r\equiv\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & Y_r\end{bmatrix}, K_r\equiv\begin{bmatrix}Y_{r+1}A_{r+1}Y_{r+1} & Y_{r+1}\\ Y_{r+1} & 0\end{bmatrix}, M_r\equiv\begin{bmatrix}H_r & G_r\\ F_r & K_r\end{bmatrix}.$$

则

$$(A_{r+1})_{T_{r+1},S_{r+1}}^{(2)}=(A_r)_{T_r,S_r}^{(2)}\cdots(A_2)_{T_2,S_2}^{(2)}(A_1)_{T_1,S_1}^{(2)},\tag{2.1}$$

当仅且当

$$\operatorname{rank}M_r=\sum_{i=1}^{r+1}\operatorname{rank}Y_i.\tag{2.2}$$

证明 将 F_r,G_r,K_r 均扩大成 $r\times r$ 块阵:

$$\widetilde{F}_r\equiv\begin{bmatrix} & & & 0\\ & O & & \vdots\\ & & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & Y_r\end{bmatrix}, \widetilde{G}_r\equiv\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & (-1)^rY_1\\ & & & 0\\ & O & & \vdots\\ & & & 0\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{K}_r\equiv\begin{bmatrix}Y_{r+1}A_{r+1}Y_{r+1} & 0 & \cdots & 0 & Y_{r+1}\\ 0 & & & & 0\\ \vdots & & O & & \vdots\\ 0 & & & & 0\\ Y_{r+1} & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},$$

并记

$$\widetilde{M}_r\equiv\begin{bmatrix}H_r & \widetilde{G}_r\\ \widetilde{F}_r & \widetilde{K}_r\end{bmatrix}.$$

利用引理 2 中的性质(a),可得

$$Y_iA_iY_i(Y_iA_iY_i)^{(1)}Y_i=Y_i\quad 与\quad Y_i(Y_iA_iY_i)^{(1)}Y_iA_iY_i=Y_i.\tag{2.3}$$

今以 $H_r^{(1)}$ 表示具有下述结构的块阵:

它是块下三角阵,其对角块为 $(Y_iA_iY_i)^{(1)}, i=1,\cdots,r$;其 (i,j) 块是

$$(-1)^{i-j}(Y_iA_iY_i)^{(1)}Y_iY_{i-1}(Y_{i-1}A_{i-1}Y_{i-1})^{(1)}Y_{i-1}\cdots Y_j(Y_jA_jY_j)^{(1)},$$
$$i=2,3,\cdots,r;\quad j=1,2,\cdots,i-1.$$

例如,$r=3$ 时,

$$H_3^{(1)}=\begin{bmatrix} (Y_1A_1Y_1)^{(1)} & 0 & 0 \\ -(Y_2A_2Y_2)^{(1)}Y_2Y_1(Y_1A_1Y_1)^{(1)} & (Y_2A_2Y_2)^{(1)} & 0 \\ (Y_3A_3Y_3)^{(1)}Y_3Y_2(Y_2A_2Y_2)^{(1)}Y_2Y_1(Y_1A_1Y_1)^{(1)} & -(Y_3A_3Y_3)^{(1)}Y_3Y_2(Y_2A_2Y_2)^{(1)} & (Y_3A_3Y_3)^{(1)} \end{bmatrix}$$

用(2.3)式易验明 $H_rH_r^{(1)}$ 与 $H_r^{(1)}H_r$ 均是块对角阵,其 (i,i) 块分别是

$$Y_iA_iY_i(Y_iA_iY_i)^{(1)} \quad 与 \quad (Y_iA_iY_i)^{(1)}Y_iA_iY_i,\quad i=1,\cdots,r,$$

进而易验明 $H_rH_r^{(1)}H_r=H_r$,以及 $H_rH_r^{(1)}\widetilde{G}_r=\widetilde{G}_r, \widetilde{F}_rH_r^{(1)}H_r=\widetilde{F}_r$.

对 $\widetilde{M}_r$ 应用引理 3,可得

$$\operatorname{rank}\widetilde{M}_r=\operatorname{rank}H_r+\operatorname{rank}(\widetilde{K}_r-\widetilde{F}_rH_r^{(1)}\widetilde{G}_r). \tag{2.4}$$

又,

$$\operatorname{rank}H_r=\operatorname{rank}H_rH_r^{(1)}=\sum_{i=1}^r\operatorname{rank}Y_iA_iY_i=\sum_{i=1}^r\operatorname{rank}Y_i. \tag{2.5}$$

因为 $H_r^{(1)}$ 的 $(r,1)$ 块是

$$(-1)^{r-1}(Y_rA_rY_r)^{(1)}Y_rY_{r-1}\cdots Y_1(Y_1A_1Y_1)^{(1)},$$

所以 $\widetilde{K}_r-\widetilde{F}_rH_r^{(1)}\widetilde{G}_r$ 的 (r,r) 块,亦即 $-\widetilde{F}_rH_r^{(1)}\widetilde{G}_r$ 的 (r,r) 块是

$$(-1)(-1)^{r-1}(-1)^rY_r(Y_rA_rY_r)^{(1)}Y_r\cdots Y_1(Y_1A_1Y_1)^{(1)}Y_1=(A_r)^{(2)}_{T_r,S_r}\cdots(A_1)^{(2)}_{T_1,S_1},$$

其中应用了引理 2 中的性质(c). 对 $\widetilde{K}_r-\widetilde{F}_rH_r^{(1)}\widetilde{G}_r$ 再用引理 3,并注意到

$$Y_{r+1}(Y_{r+1}A_{r+1}Y_{r+1})^{(1)}Y_{r+1}=(A_{r+1})^{(2)}_{T_{r+1},S_{r+1}},$$

可得

$$\operatorname{rank}(\widetilde{K}_r-\widetilde{F}_rH_r^{(1)}\widetilde{G}_r)=\operatorname{rank}Y_{r+1}+\operatorname{rank}[(A_r)^{(2)}_{T_r,S_r}\cdots(A_1)^{(2)}_{T_1,S_1}-(A_{r+1})^{(2)}_{T_{r+1},S_{r+1}}]. \tag{2.6}$$

合并(2.4)—(2.6)三式,并在 $\widetilde{M}_r$ 中删去零行、零列,即得欲证之结论. □

我们在文[2,p102,表 1]中已给出了 8 种常用的 $(T,S,2)$-逆的满足条件 $T=R(Y)$ 与 $S=N(Y)$ 的参阵 Y 的一种取法;对于文[3]中涉及的 EldénMP 逆 A^+_{HK},可以证明 $A^+_{HK}=A^{(2)}_{N_0^+R(A^*M),N(A^*M)}$,这里 $M\equiv H^*H, N\equiv K^*K, N_0\equiv A^*MA+N$,相应的 Y 可取作 $N_0^+A^*M$. 对于总是存在的常用广义逆,易得其反序律成立的充要条件. 例如,若考虑的是 $A_i^+, i=1,\cdots,r+1$, 则只需取 $Y_i=A_i^*$;若考虑的是 $(A_i)^+_{M_i,N_i}$,只需取 $Y_i=N_i^{-1}A_i^*M_i$;对于 $A_i^{(d)}$,只需取 $Y_i=A_i^{l_i}$ $(l_i\equiv \operatorname{index}(A_i))$,等等. 还可考虑"混合"型的反序律,比如 $(ABC)^{(d)}=C^+B^+A^+$,$(ABC)^+_{MN}=C^+B^+A^+$,等等,相应的充要条件也容易写出.

值得指出的是,常用的各种广义逆矩阵有的总是存在,但有的是在一定条件下才存在,比如 BD 逆,广义 BD 逆,等. 所以,若在反序律中出现要求存在条件的广义逆时,则必需考虑这种条件. 例如,若 $(A_i)^{(2)}_{T_i,S_i}(i=1,\cdots,r)$ 总是存在或给定的,而 $(A_{r+1})^{(2)}_{T_{r+1},S_{r+1}}$ 的存在是有条件的,则我们必须考虑它的存在条件以及 T_{r+1}, S_{r+1} 分别与 $T_i, S_i(i=1,\cdots,r)$ 的依赖关系,即

$$S_{r+1}=N((A_r)^{(2)}_{T_r,S_r}\cdots(A_1)^{(2)}_{T_1,S_1}),\quad T_{r+1}=R((A_r)^{(2)}_{T_r,S_r}\cdots(A_1)^{(2)}_{T_1,S_1}).$$

应用引理 4 中矩阵积的零空间公式，并注意到 A 是其(2)-逆的(1)-逆，可将 S_{r+1}，T_{r+1}分别地用 $A_i,T_i,S_i(i=1,\cdots,r)$表出. 例如，

$$S_4=N(C^{(2)}_{T_3,S_3}B^{(2)}_{T_2,S_2}A^{(2)}_{T_1,S_1})=A[T_1\cap[B(T_2\cap S_3)\oplus S_2]]\oplus S_1,$$

$$\begin{aligned}T_4^{\perp}&=N((A^*)^{(2)}_{S_1^{\perp},T_1^{\perp}}(B^*)^{(2)}_{S_2^{\perp},T_2^{\perp}}(C^*)^{(2)}_{S_3^{\perp},T_3^{\perp}})\\&=C^*[S_3^{\perp}\cap[B^*(S_2^{\perp}\cap T_1^{\perp})\oplus T_2^{\perp}]]\oplus T_3^{\perp}.\end{aligned}$$

对于更多个$(T_i,S_i,2)$-逆之积的值域与零空间，将出现更多层方括号嵌套的形式.

综合上述讨论，不难得到任意多个矩阵之积的任意$(T,S,2)$-逆的反序律如次.

定理 2 设$(A_i)^{(2)}_{T_i,S_i}(i=1,\cdots,r)$总是存在的或是给定的. 则对某两个子空间 T_{r+1}与 S_{r+1}使得$(A_{r+1})^{(2)}_{T_{r+1},S_{r+1}}$存在，且反序律(2.1)成立当且仅当下面两个条件成立：

(1) $A_{r+1}T_{r+1}\oplus S_{r+1}=C^{m_1}$，

这里设 $A_1\in C^{m_1\times n_1}$，而其中

$$S_{r+1}=A_1[T_1\cap[A_2[T_2\cap[\cdots[A_{r-1}(T_{r-1}\cap S_r)\oplus S_{r-1}]\cdots]]]]\oplus S_1,$$

$$T_{r+1}^{\perp}=A_r^*[S_r^{\perp}\cap[A_{r-1}{}^*[S_{r-1}^{\perp}\cap[\cdots[A_2^*(S_2^{\perp}\cap T_1^{\perp})\oplus T_2^{\perp}]\cdots]]]]\oplus T_r^{\perp};$$

(2) $\operatorname{rank}M_r=\sum_{i=1}^{r+1}\operatorname{rank}Y_i$，

其中 M_r 与 Y_i 的意义如定理 1 中所述. □

参考文献：

[1] BEN-ISRAEL A, GREVILLE T N E. *Generalized Inverses: Theory and Applications* [M]. Wiley, New York, 1974.

[2] CHEN Yong-Lin, CHEN Xin. *Representation and approximation of the outer inverse $A^{(2)}_{T,S}$ of a matrix A* [J]. Linear Algebra Appl., 2000, **308**: 85—107.

[3] 陈永林. 常用矩阵广义逆连续性的充要条件的统一形式 [J]. 应用数学学报，1999，**22**(3)：433—437.
CHEN Yong-lin. *A unified form of the necessary and sufficient conditions for the continuity of many generalized inverses of matries in common use* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1999, **22**(3): 433—437. (in Chinese)

[4] 陈永林. 关于 Neumann 型级数与超幂迭代的注记 [J]. 南京师大学报，2003，**26**(1)：1—5.
CHEN Yong-lin. *Note on Neumann-type expansion and hyperpower iteration* [J]. J. Nanjing Normal University, 2003, **26**(1): 1—5. (in Chinese)

[5] SUN Wen-yu, Wei Yi-min. *Inverse order rule for weighted generalized inverse* [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1998, **19**: 772—775.

[6] TIAN Yong-ge. *The Moore-Penrose inverse of a triple matrix product* [J]. Math. Practice Theory, 1992, **1**: 64—70. (in Chinese)

[7] TIAN Hong-jiong. *On the Reverse order law $(AB)^D=B^DA^D$*[J]. J. Math. Res. Exposition, 1999, **19**(2): 355—358.

[8] 王国荣，高景. 三矩阵乘积的加权 Moore-Penrose 逆的反序律 [J]. 上海师范大学学报，2000，**29**(3)：1—11.

WANG Guo-rong, GAO Jing. *Reverse order law for the weighted Moore-Penrose inverse of a triple matrix product* [J]. J. Shanghai Teacher's University, 2000, **29**(3): 1—11. (in Chinese)
[9] 刘桂香. 三矩阵乘积的$(T,S,2)$-逆的反序律 [J]. 数学研究与评论, 2003, **23**(4): 731—736.
LIU Gui-xiang. *The reverse order law for $(T,S,2)$-inverse of a triple matrix product* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2003, **23**(4): 731—736. (in Chinese)

Reverse Order Law for $(T,S,2)$ -Generalized Inverses of Product of Arbitrarily Many Matrices

CHEN Yong-lin
(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Jiangsu 210097, China)

Abstract: In this paper we give a necessary and sufficient condition for the validity of the reverse order law

$$(A_1A_2\cdots A_r)^{(2)}_{T_{r+1},S_{r+1}}=(A_r)^{(2)}_{T_r,S_r}\cdots(A_2)^{(2)}_{T_2,S_2}(A_1)^{(2)}_{T_1,S_1}.$$

Key words: $(T,S,2)$-generalized inverse; reverse order law.