第 24 卷第 4 期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 4
2004年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2004

M-带插值小波包 *

崔丽鸿[1]， 张新敬[2]

(1. 北京化工大学数学系，北京 100029；2. 郑州轻工业学院信息与计算科学系，河南 郑州 450002)

摘 要：本文给出 M-带插值小波包的构造. M-带插值小波包是根据基插值函数建立的迭代函数序列进行伸缩平移的空间序列. 这种小波包可使信号分解更为精细，并具有更好的局部性. 由此建立了这种小波包子空间上的近似采样定理.

关键词：M-带小波；基插值函数；小波包；采样定理.

分类号：AMS(2000) 42C40,65T60/CLC number：O174.2

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)04-0715-06

1 引 言

近年来，随着 2-带小波的深入研究和广泛应用[1],[2]，M-带小波以其独有的优势受到越来越多的关注[3]-[8]. 我们知道，$M(M\geqslant 3)$带小波与 2-带小波相比，具有频带划分更细、能量更集中、小波的构造具有更大的自由度和灵活性及更容易满足小波的对称性和光滑性等方面优点. 特别地，2-带基尺度函数的正交性与紧支撑性是不相容的，而对于一般 $M(M\geqslant 3)$带却可以很好的相容，如 Bi，Dai 和 Sun[6]构造了 M-带($M\geqslant 3$)既正交又是基函数的尺度函数；Ji 和 Shen[7]给出了 M-带($M\geqslant 4$)既正交、对称又是基函数的尺度函数. 众所周知，如果一个尺度函数是基函数，则很容易将 Shannon 采样定理扩展到小波子空间上. 但由于不存在 2-带紧支撑正交的基尺度函数，这使得按 2-带正交的基尺度函数构造的 Shannon 型采样定理是无穷项. 文[9]给出了 2-带插值小波包的构造，使得信号分解具有更广泛的适应性. 文[10]将 2-带小波包的概念和性质推广到 M-带小波包上，并建立了 M-带正交小波包的理论框架，为小波包的全频带快速分解和实现奠定了理论基础. 但[10]所建立的小波包不具有插值性，也很难在小波包上建立采样定理. 本文的目的是构造出 M-带插值小波包，并建立了这种小波包子空间上的近似采样定理.

定义 1 $L^2(R)$闭子空间的序列$\{V_j\}_{j\in Z}$形成一个多分辨分析，如果对整数 $M>2$，满足

1) $V_j\subset V_{j+1},\forall\ j\in Z$； 2) $\mathrm{Clos}_{L^2(R)}(\bigcup\limits_{j\in Z}V_j)=L^2(R)$；

3) $\bigcap\limits_{j\in Z}V_j=\{0\}$； 4) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(Mx)\in V_{j+1}$；

* 收稿日期：2002-01-02

基金项目：北京化工大学青年教师研究基金(QN.0414)

作者简介：崔丽鸿(1965-)，女，副教授.

5) $V_0=\mathrm{Clos}_{L^2}\langle\varphi(\cdot-n);n\in Z\rangle$并且$\{\varphi_{0,n};n\in Z\}$是$V_0$空间的 Riesz 基.

称 5)中的φ为M-带尺度函数.显然满足两尺度方程

$$\varphi(x)=\sum_{\alpha\in Z}m(\alpha)\varphi(Mx-\alpha),\tag{1}$$

其中$m(\alpha)$为两尺度序列.

定义 2 设尺度函数$\varphi(x)$满足

$$\varphi(n)=\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\ n\in Z\end{cases}\tag{2}$$

称$\varphi(x)$为基尺度函数,也称基插值尺度函数.显然$\varphi(x)$的两尺度序列$\{m(\alpha)\}$满足

$$m(M\beta)=\varphi(\beta)=\delta(\beta),\quad \beta\in Z.\tag{3}$$

2 M-带基插值小波包

对基尺度函数$\varphi(x)$,设$h_0(x)=\varphi(x)$,构造迭代函数序列$\{h_n\}$如下

$$\begin{cases}h_{Mn}(x)=\sum_{\alpha\in Z}m(\alpha)h_n(Mx-\alpha)\\ h_{Mn+i}(x)=h_n(Mx-i), \quad i=1,2,\cdots,M-1\end{cases}\tag{4}$$

用$\mathscr{H}_n$表示由h_n产生的闭平移不变子空间,$\mathscr{H}_n=\overline{\{f:f=\sum_{k\in Z}a(\alpha)h_n(\cdot-\alpha),a\in l_0(Z)\}}$,其中$l_0(Z)$是有限支撑序列构成的空间.称$\mathscr{H}_0$是基插值空间,即它是由基插值函数的平移张成的空间.

定义 3 称集合

$$\{h_n(M^k\cdot-\alpha);n\in Z_+,k\in Z,\alpha\in Z\}\tag{5}$$

是由插值基函数φ生成的M带插值小波包族.

定义伸缩算子$D:\mathscr{H}_n\to D\mathscr{H}_n$为$Df:=f(M\cdot)$.则$D^j\mathscr{H}_0$是基插值空间$\mathscr{H}_0$的第$M^j$伸缩.

定理 1 设$D\mathscr{H}_n$是上式定义的伸缩算子,则有$\{h_{Mn+i}(\cdot-\alpha):i=1,2,\cdots,M-1;\alpha\in Z\}$形成$D\mathscr{H}_n$的一个 Riesz 基.即

$$D\mathscr{H}_n=\mathscr{H}_{Mn}\oplus\mathscr{H}_{Mn+1}\oplus\cdots\oplus\mathscr{H}_{Mn+M-1}.\tag{6}$$

证明 首先由(3)和(4)式可以得到

$$\begin{aligned}h_{Mn}(x)=&h_n(Mx)+\sum_{\alpha\in Z}m(M\alpha+1)h_n(Mx-M\alpha-1)+\\&\sum_{\alpha\in Z}m(M\alpha+2)h_n(Mx-M\alpha-2)+\cdots+\\&\sum_{\alpha\in Z}m(M\alpha+M-1)h_n(Mx-M\alpha-M+1),\end{aligned}\tag{7}$$

也即有

$$\begin{aligned}h_{Mn}(x)=&h_n(Mx)+\sum_{\alpha\in Z}m(M\alpha+1)h_{Mn+1}(x-\alpha)+\\&\sum_{\alpha\in Z}m(M\alpha+2)h_{Mn+2}(x-\alpha)+\cdots+\end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha\in Z} m(M\alpha+M-1)h_{Mn+M-1}(x-\alpha). \tag{8}$$

设任意的函数 $g(x)\in D\mathscr{H}_n$，则一定存在序列 $\{b(\alpha)\}\in l^2(Z)$ 有 $g(x)=\sum_{\alpha\in Z} b(\alpha)h_n(Mx-\alpha)$. 取 $c^0(\alpha)=b(M\alpha)$，$c^i(\alpha)=b(M\alpha+i)-\sum_{\beta\in Z} b(M(\alpha+\beta))m(M\beta+i)$，$i=1,2,\cdots,M-1$，$\alpha\in Z$，用(7)或(8)可以证明上面定义的 M 个序列 $\{c^i(\alpha)\}\in l^2(Z)(i=0,1,\cdots,M-1)$ 有

$$g(x)=\sum_{\alpha\in Z} c^0(\alpha)h_{Mn}(x-\alpha)+\sum_{\alpha\in Z} c^1(\alpha)h_{Mn+1}(x-\alpha)+\cdots+$$
$$\sum_{\alpha\in Z} c^{M-1}(\alpha)h_{Mn+M-1}(x-\alpha), \tag{9}$$

(9)式说明了 $D\mathscr{H}_n\subseteq\mathscr{H}_{Mn}\oplus\mathscr{H}_{Mn+1}\oplus\cdots\oplus\mathscr{H}_{Mn+M-1}$.

反之，设任意的 $f_i(x)=\sum_\alpha a^i(\alpha)h_{Mn+i}(x-\alpha)\in\mathscr{H}_{Mn+i}$ 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{M-1} f_i(x) &= \sum_{i=0}^{M-1}\sum_\alpha a^i(\alpha)h_{Mn+i}(x-\alpha)\\ &= \sum_\alpha a^0(\alpha)h_{Mn}(x-\alpha)+\sum_{i=1}^{M-1}\sum_\alpha a^i(\alpha)h_{Mn+i}(x-\alpha)\\ &= \sum_\alpha a^0(\alpha)\Big[h_n(Mx-M\alpha)+\sum_{i=1}^{M-1}\sum m(M\alpha+i)h_n(Mx-2M\alpha-i)\Big]+\\ &\quad \sum_{i=1}^{M-1}\sum_\alpha a^i(\alpha)h_n(Mx-M\alpha-i),\end{aligned}$$

即 $\sum_{i=0}^{M-1} f_i(x)\in D\mathscr{H}_n$. 结合上面的证明有(6)式成立. 即 $\{h_{Mn+i}(\cdot-\alpha);i=1,2,\cdots,M-1;\alpha\in Z\}$ 形成 $D\mathscr{H}_n$ 的一个 Riesz 基. □

定理 2 设 D 为上面所定义的伸缩算子，D^j 为伸缩算子 D 的第 j 次复合，对 $D^j\mathscr{H}_0$，$D^j\mathscr{H}_1$ 有

$$D^j\mathscr{H}_0=\bigoplus_{k=0}^{M^j-1} H_k,\quad j\geqslant 1, j\in Z, \tag{10}$$

$$D^j\mathscr{H}_1=\bigoplus_{k=M^j}^{2M^j-1} H_k,\quad j\geqslant 1,\ j\in Z. \tag{11}$$

应用定理 1 中的(6)式即可证明定理 2. □

引入整数 r 和小数 r^* 为下列对应关系.

$$r=\sum_{l=0}^{k-1}\eta_l M^l\leftrightarrow r^*=\frac{1}{M^{k+1}}+\sum_{l=0}^{k-1}\eta_l M^{-l},\quad \forall\ \eta_l\in\{0,1,\cdots,M-1\} \tag{12}$$

并规定当 $r=0$ 时，对应的数 $r^*=0$.

定理 3 对任何 $k\geqslant 0$, $0\leqslant s,r\leqslant M^k-1$ 以及由(12)式定义的 s 和 s^*，有如下结论成立

$$h_{M^k+r}(\beta/M^k)=0,\quad \forall\ \beta\in Z,$$

$$h_{M^k+r}\Big(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}s^*\Big)=\begin{cases}0, & s<r,\forall\ \beta;\\ \delta(\beta), & s=r,\beta\in Z.\end{cases} \tag{13}$$

证明 对 k 进行归纳证明. 当 $k=0$ 时，对应唯一的 $r=0$. 此时，$h_0=\varphi$ 是基插值函数，由

(4)式，得 $h_1(\beta)=h_0(M\beta-1)=0,\quad h_1(\beta+\frac{1}{M})=h_0(M\beta)=\delta(M\beta)$.

假设定理 3 对任意小于 k 的整数成立. 现证定理 3 对 k 成立. 考虑 $Mn=M^k+Mr$，设

$$s=\sum_{l=0}^{k-1}\eta_l M^l,\quad s^*=\frac{1}{M^{k+1}}+\sum_{l=0}^{k-1}\eta_l M^{-l}, \tag{14}$$

则有

$$h_{M^k+Mr}(\beta/M^k)=\sum_{\alpha\in Z}m(\alpha)h_{M^{k-1}+r}(\beta/M^{k-1}-\alpha)=0,$$

$$\begin{aligned}h_{M^k+Mr}(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}s^*)&=\sum_{\alpha\in Z}m(\alpha)h_{M^{k-1}+r}(M\beta+\frac{1}{M^k}+s^*-\alpha)\\&=\sum_{\alpha\in Z}m(\alpha)h_{M^{k-1}+r}(M\beta+\frac{1}{M^k}+\eta_0+\frac{1}{M^{k+1}}+\sum_{l=1}^{k-1}\eta_l M^{-l}-\alpha)\\&=\sum_{\alpha\in Z}m(\alpha)h_{M^{k-1}+r}(M\beta+\eta_0-\alpha+\frac{1}{M^k}+\frac{1}{M}\tilde{s}^*)\\&=\begin{cases}0, & s<Mr,\beta\in Z,\\ m(M\beta)=\delta(\beta), & s=Mr,\beta\in Z.\end{cases}\end{aligned}$$

类似的，对 $Mn+i=M^k+Mr+i(i=1,2,\cdots,M-1)$时有

$$\begin{aligned}h_{M^k+Mr+i}(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}s^*)&=h_{M^{k-1}+r}(M\beta+\frac{1}{M^k}+s^*-i)\\&=h_{M^{k-1}+r}(M\beta+\eta_0-i+\frac{1}{M^k}+\frac{1}{M}\tilde{s}^*)\\&=\begin{cases}0, & s<Mr+i,\beta\in Z,\\ m(M\beta)=\delta(\beta), & s=Mr+i,\ \beta\in Z.\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $\tilde{s}^*=\frac{1}{M^k}+\sum_{l=0}^{k-2}\eta_{l+1}M_{-l}$.

注释 在上面的证明过程中，分别讨论 $Mn+i=M^k+Mr+i(i=0,1,2,\cdots,M-1)$的情形. 当 $s=\sum_{l=0}^{k-1}\eta_l M^l\leqslant Mr+i$ 时，有 $\sum_{l=0}^{k-2}\eta_{l+1}M^l\leqslant r$ 成立. 如当 $i=0$ 情形时，则有 $\sum_{l=0}^{k-2}\eta_{l+1}M^l\leqslant r$，此时只有当 $\eta_0=0$ 时，上式等号才可能成立. 当 i 为其它值时可以类似讨论.

3 小波包子空间上的近似插值采样定理

在信号处理过程中，采样定理是最重要的数学工具之一. 最著名的采样定理是 Shannon 采样定理. G. Walter[11]最早将 Shannon 采样定理推广到小波子空间上. 同样地，如果将小波包理论应用于信号处理、图像压缩等领域中，也需要建立小波包子空间上的采样定理. 本节将给出小波包子空间上的近似插值采样定理.

定义第 M^j 阶的基插值算子 L_{M^j}为

$$L_{M^j}f:=\sum_{\alpha\in Z}f(\alpha/M^j)\,\varphi(M^jx-\alpha), \tag{16}$$

由于 $\varphi(x)$是基插值函数，因此有 $L_{M^j}f(\alpha/M^j)=f(\alpha/M^j)$. 当 j 充分大时，(16)式提供了函数 $f(x)$的一个近似表示，即 $\lim_{j\to\infty}L_jf=f$.

下面利用定理 3 给出的结果建立小波包子空间上的近似插值采样定理. 为此定义插值算

子 $L_{(M^k,r)}$ 为

$$L_{(M^k,r)}f(x):=\sum_{\beta\in Z}f(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}r^*)h_{M^k+r}(x-\beta), \tag{17}$$

其中 $s,r\in\{0,1,\cdots,M^k-1\}$.

定理 4　设 $L_{(M^k,r)}$ 为(17)式定义的插值算子，则

$$L_{(M^k,r)}f(\beta/M^k)=0,\quad \forall\,\beta\in Z, \tag{18}$$

$$L_{(M^k,r)}f(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}s^*)=\begin{cases}0, & s<r,\forall\,\beta\in Z;\\ f(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}r^*) & s=r,\beta\in Z.\end{cases} \tag{19}$$

即是 $L_{(M^k,r)}f(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}s^*)=f(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}r^*)$，定理 4 可以用定理 3 的证明方法类似证明.

因此对任意的 $g(x)\in\mathscr{H}_{M^k+r}$，有如下的近似采样定理

$$g(x)\approx L_{(M^k,r)}g(x):=\sum_{\beta\in Z}g(\beta+\frac{1}{M^{k+1}}+\frac{1}{M}r^*)h_{M^k+r}(x-\beta). \tag{20}$$

下面将给出插值算子 L_{M^k} 的分解关系. 设

$$\begin{cases}g_0=f-L_{M^{k-1}}f,\\ g_r=g_{r-1}-L_{(M^{k-1},r)}g_{r-1},\quad r=1,2,\cdots,M^{k-1}-1.\end{cases} \tag{21}$$

定理 5　$L_{M^k},L_{(M^k,r)}$ 分别为(16)和(17)式所定义，函数序列 $\{g_r\}_{r=0}^{M^{k-1}-1}$ 为(21)式所定义，对任意函数 $f(x)$ 有

$$L_{M^k}f=L_{M^{k-1}}f+\sum_{r=0}^{M^{k-1}-1}L_{(M^k,r)}g_r. \tag{22}$$

证明　根据(16)式可以得到 $L_{M^k}f\in D^k\mathscr{H}_0$，同理有 $L_{M^{k-1}}f\in D^{k-1}\mathscr{H}_0$. 又 $\sum_{r=0}^{M^{k-1}-1}L_{(M^k,r)}g_r\in\bigoplus_{r=0}^{M^{k-1}-1}\mathscr{H}_{M^{k-1}+r}$. 再由定理 2 可知 $L_{M^k}f$ 和 $L_{M^{k-1}}f-\sum_{r=0}^{M^{k-1}-1}L_{(M^k,r)}g_r$ 均在同一空间 $D^k\mathscr{H}_0$ 中.

下面证明等式(22) 的两边具有相同的插值点 $\frac{\alpha}{M^k}$. 为此，分两种情况证明：

1) 若 α 是 M 的倍数，则由定理 4 知 $\sum_{r=0}^{M^{k-1}-1}L_{(M^k,r)}g_r(\frac{\alpha}{M^k})=0$，此时显然有(22) 式成立.

2) 若 α 不是 M 的倍数，并应用定理 4，则对 $L_{M^k}f$ 的插值点 $\frac{\alpha}{M^k}$ 有

$$\begin{aligned}&L_{M^{k-1}}f(\frac{\alpha}{M^k})+\sum_{r=0}^{M^{k-1}-1}L_{(M^{k-1},r)}g_r(\frac{\alpha}{M^k})\\ &=L_{M^{k-1}}f(\frac{\alpha}{M^k})+L_{(M^{k-1},0)}g_0(\frac{\alpha}{M^k})+\sum_{r=1}^{M^{k-1}-1}L_{(M^{k-1},r)}g_r(\frac{\alpha}{M^k})\\ &=L_{M^{k-1}}f(\frac{\alpha}{M^k})+g_0(\frac{\alpha}{M^k})=f(\frac{\alpha}{M^k}).\end{aligned}$$

由插值唯一性及 1)和 2)的证明得到(22)式成立.　□

参考文献：

[1] CHUI C K. 小波导论 [M]. 程正兴,译. 西安:西安交通大学出版社, 1995.
CHUI C K. *An Introduction to wavelets* [J]. Cheng Zheng-xing Translation. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1995.

[2] DAUBECHIES I. *Ten Lecture on Wavelets in AppliedMath* 6 [M]. Philudelphia: SIAM Publ, 1992, 1—339.

[3] WELLAND G V, LUNDBERG M. *Consrtuction of compactly p-wavelets* [J]. Constructive Approximation, 1993, **3**: 347—370.

[4] CHUI C K, LIAN J. *Construction of compactly supported symmetric and anti-symmetric orthonormal wavelets* [J]. Appl. Comput. Harmon. Anal., 1995, **2**: 21—51.

[5] CUI Li-hong, CHENG Zheng-xing. *An algorithmfor constructing symmetric orthogonal multiwavelets bymatrix symmetric extension* [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, **149**(1): 227—243.

[6] BI N, DAI X, SUN Q. *Construction of compactly supported M-band wavelets* [J]. Appli. Comput. Harmonic Anal., 1999, **6**: 113—131.

[7] JI H, SHEN Z. *Compactly supported (bi)orthogonal wavelets generated by interpolatory refinable functions* [J]. Adv. Comput. Math., 1999, **11**: 81—104.

[8] 崔丽鸿, 程正兴. *M*-带紧支撑正交对称复尺度函数的构造 [J]. 高等学校计算数学学报, 2003, **25**(2): 160—166.
CUI Li-hong, CHENG Zheng-xing. *Construction of M-band compactly supported orthogonal complex scaling function* [J]. Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities, 2003, **25**(2): 160—166. (in Chinese)

[9] SHERMAN D R, SHEN Zuo-wei. *Interpolatory wavelet packets* [J]. Appl. Comput. Harmonic Anal., 2000, **8**: 320—324.

[10] 杨守志,杨晓忠,程正兴. 正交小波包的构造 [J]. 数学研究与评论, 1997, **2**: 219—224.
YANG Shou-zhi, YANG Xiao-zhong, CHENG Zheng-xing. *Construction of orthonormal wavelet packets* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1997, **2**: 219—224.

[11] WALTER G G. *A sampling theory for wavelet subspace* [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1992, **38**: 881—884.

M- Band Interpolatory Wavelet Packets

CUI Li-hong[1], ZHANG Xin-jing[2]

(1. Dept. of Math., Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;
2. Dept. of Infor. and Calc. Sci., Zhengzhou Inst. of Light Ind., Henan 450002, China)

Abstract: In this paper, we present a construction of *M*-band interpolatory wavelet packets. *M*-band interpolatory wavelet packets is a sequence space spanned by dilation translates of a iterate function sequence obtained by a cardinal interpolation function. The wavelet packets provide a finer decomposition for a given signal and give a better localization. Hence approximated sampling theorem in the wavelet packets space is obtained.

Key words: *M*-band wavelet; cardinal interpolation function; wavelet packets; sampling theorem .