第 24 卷第 4 期 2004年11月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 4 Nov. 2004

正向量连分式收敛的充分必要条件*

肖 萍[1]， 赵欢喜[1,2]

（1. 中南大学数学院，湖南 长沙 410083；2. 中国科技大学数学系，安徽 合肥 230026）

摘 要：我们讨论了如下形式的向量值连分式

$$\vec{b}_0+\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(a_n/\vec{b}_n), \tag{\#}$$

这里 $\vec{b}_n=(b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d)$ 满足 Samelson 逆，而且 a_n, b_n^1, b_n^2, $\cdots$, b_n^d 均为正. 给出了形如（#）的向量值连分式收敛的充分和必要条件，同时给出了收敛时的截断误差估计.

关键词：向量值连分式；收敛；截断误差估计.

分类号：AMS(2000) 40A15,15A60/CLC number: O241.5

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)04-0721-07

1 引 言

已有许多文献对向量值连分式的有理插值、有理插值算法、有理逼近等进行了研究[1-8]，但向量值连分式的收敛结果很少报道，这一方面的第一个结果是由文[9]利用一定的技巧对向量值连分式 $\vec{b}_0+\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(1/\vec{b}_n)$ 给出了一个特殊的 Pringsheim 收敛定理. 众所周知，连分式的任何应用都与其可能的收敛性联系在一起，因此，连分式的收敛定理在连分式理论中占有重要地位. 本文想把正项连分式在数量情形的一些重要收敛结果推广到向量情形. 在讨论向量情形之前，先回忆一下正项连分式在数量情形的一些重要收敛结果.

称 $b_0+\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$，这里的 a_i, $b_i>0, i=0,1,2,\cdots$，为正项数量连分式.

类似地，若 $\vec{b}_n=(b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d)$, a_i, $b_i^j>0$, $i=0, 1, \cdots$; $j=1, 2, \cdots, d$, 则称 $\vec{b}_0+\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(a_n/\vec{b}_n)$ 为正向量值连分式. 对正项数量连分式有以下结论：

结论 1 连分式 $\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$，这里 $b_n>0$, $n=1, 2, \cdots$，收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=+\infty$.

结论 2 对正项连分式若成立如下不等式

$$b_n\geqslant a_n,\ b_n\geqslant M>0,\ n=1, 2, \cdots,$$

* 收稿日期：2001-11-12

作者简介：肖萍(1967-)，女，博士研究生，副教授.

则连分式 $\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ 收敛.

结论 1 与结论 2 的证明要用到连分式的三项递推公式,但我们知道,对向量值连分式,不成立三项递推公式,故必须另辟蹊径. 由文献[11],连分式成立所谓的向后三项递推公式,本文把此向后三项递推公式推广到向量情形. 进而利用推广的向后三项递推公式把结论 1 与结论 2 推广到向量情形.

2 几个引理

首先给出几个记号,令

$$\begin{cases}\vec{s}_m(\vec{w})=\dfrac{a_m}{\vec{b}_m+\vec{w}} \quad a_m\neq 0,\ \vec{w},\ \vec{b}_m\in\mathscr{R}^d,\ m\geqslant 1,\ d\in N,\\ \vec{S}_{n+1,\,n+m}(\vec{w})=\vec{s}_{n+1}(\cdots\vec{s}_{n+m}(\vec{w})),\ n\geqslant 0,\ m\geqslant 1,\end{cases} \tag{1}$$

显然,有

$$\vec{b}_0+\vec{S}_{1,n}(\vec{0})=\vec{b}_0+\mathop{K}\limits_{k=1}^{n}(\frac{a_k}{\vec{b}_k}) \tag{2}$$

在给出向量值连分式的收敛结论之前,先给出几个引理.

首先文献[11]用数学归纳法证明了如下引理.

引理 1[11] 记

$$p_{n,n}=b_n,\ q_{n,n}=1,\ q_{n-1,n}=b_n^2,$$

$$p_{i,n}=b_i\cdot q_{i,n}+a_{i+1}p_{i+1,n},$$

$$q_{i,n}=b_{i+1}^2\cdot q_{i+1,n}+2a_{i+2}b_{i+1}p_{i+2,n}+a_{i+2}^2\cdot q_{i+2,n}\quad (i=n,\ \cdots,\ 1,\ 0),$$

则

1) $S_{i+1,n}(0)=\dfrac{p_{i,n}}{q_{i,n}}-b_i\quad (i=n-1,\ \cdots,\ 1,\ 0)$,

2) $p_{i,n}^2=q_{i,n}\cdot q_{i-1,n}\quad (i=n,\ \cdots,\ 1,\ 0)$.

对向量值连分式,用与引理 1 中类似的方法可以证明:

定理 1 记

$$\vec{p}_{n,n}=\vec{b}_n,\ q_{n,n}=1,\ q_{n-1,n}=\|\vec{b}_n\|^2, \tag{3}$$

$$\vec{p}_{i,n}=\vec{b}_i\cdot q_{i,n}+a_{i+1}\vec{p}_{i+1,\,n}, \tag{4}$$

$$q_{i,\,n}=\|\vec{b}_{i+1}\|^2\cdot q_{i+1,n}+2a_{i+2}\vec{b}_{i+1}\vec{p}_{i+2,n}+a_{i+2}^2\cdot q_{i+2,n}\quad (i=n,\ \cdots,\ 1,\ 0), \tag{5}$$

则

$$\vec{S}_{i+1,\,n}(\vec{0})=\frac{\vec{p}_{i,n}}{q_{i,n}}-\vec{b}_i\quad (i=n-1,\cdots,1,0), \tag{6}$$

$$\|\vec{p}_{i,n}\|^2=q_n^i\cdot q_n^{i-1}\quad (i=n,\cdots,1,0). \tag{7}$$

利用定理 1,不难证明下面的定理 2,即

定理 2 对$\forall\ m,n\in N$,有

$$\|\vec{S}_{1,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\|=|a_1\cdots a_{n+1}|\sqrt{q_{n+1,\,n+m}}/\sqrt{q_{0,\,n}q_{0,n+m}}.$$

证明　由定理 1 的(4),(6),有

$$\|\vec{S}_{1,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\| = \left\|\frac{\vec{p}_{0,n+m}}{q_{0,n+m}}-\frac{\vec{p}_{0,n}}{q_{0,n}}\right\| = \frac{1}{q_{0,n}q_{0,n+m}}\|\vec{p}_{0,n+m}q_{0,n}-\vec{p}_{0,n}q_{0,n+m}\|$$

$$=\frac{|a_1|}{q_{0,n}q_{0,n+m}}\|\vec{p}_{1,n+m}q_{0,n}-\vec{p}_{1,n}q_{0,n+m}\|$$

$$=\frac{|a_1|}{q_{0,n}q_{0,n+m}}\left\|\frac{\vec{p}_{1,n+m}\|\vec{p}_{1,n}\|^2}{q_{1,n}}-\frac{\vec{p}_{1,n}\|\vec{p}_{1,n+m}\|^2}{q_{1,n+m}}\right\|$$

$$=\frac{|a_1|\cdot\|\vec{p}_{1,n}\|\cdot\|\vec{p}_{1,n+m}\|}{q_{0,n}q_{0,n+m}}\|\vec{S}_{2,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{2,n}(\vec{0})\|,$$

重复上述过程,得

$$\|\vec{S}_{1,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\|$$

$$=\frac{|a_1\cdots a_{n-1}|\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\|\vec{p}_{k,n}\|\cdot\|\vec{p}_{k,n+m}\|}{\prod_{k=0}^{n-2}q_{k,n}q_{k,n+m}}\|\vec{S}_{n,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{n,n}(\vec{0})\|,\tag{8}$$

而

$$\|\vec{S}_{n,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{n,n}(\vec{0})\| = \left\|\frac{\vec{p}_{n-1,n+m}}{q_{n-1,n+m}}-\frac{\vec{p}_{n-1,n}}{q_{n-1,n}}\right\|$$

$$=\frac{1}{q_{n-1,n}q_{n-1,n+m}}\|\vec{p}_{n-1,n+m}q_{n-1,n}-\vec{p}_{n-1,n}q_{n-1,n+m}\|$$

$$=\frac{a_n\|\vec{p}_{n,n}\|\cdot\|\vec{p}_{n,n+m}\|}{q_{n-1,n}q_{n-1,n+m}}\left\|\frac{\vec{p}_{n,n+m}}{q_{n,n+m}}-\frac{\vec{p}_{n,n}}{q_{n,n}}\right\|$$

$$=\frac{a_n\|\vec{p}_{n,n}\|\cdot\|\vec{p}_{n,n+m}\|}{q_{n-1,n}q_{n-1,n+m}q_{n,n}q_{n,n+m}}\|a_{n+1}\vec{p}_{n+1,n+m}\|.\tag{9}$$

因此,由(8),(9)知

$$\|\vec{S}_{1,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\| = \frac{|a_1\cdots a_{n+1}|\cdot\prod_{k=1}^{n}\|\vec{p}_{k,n}\|\cdot\|\vec{p}_{k,n+m}\|\cdot\|\vec{p}_{n+1,n+m}\|}{\prod_{k=0}^{n}q_{k,n}q_{k,n+m}}.\tag{10}$$

又由(7),(10)知

$$\|\vec{S}_{1,n+m}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\| = |a_1\cdots a_{n+1}|\sqrt{q_{n+1,n+m}}/\sqrt{q_{0,n}q_{0,n+m}}.\qquad\square$$

由定理 2,马上可以知道对数量连分式 $b_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$成立如下结论:

推论 1　记 $f_n=b_0+\underset{k=1}{\overset{n}{K}}(a_k/b_k)$,则对任意$\forall\ m,\ n\in N$,有

$|f_{n+m}-f_n|=|a_1|\cdots|a_{n+1}|\sqrt{q_{n+1,n+m}}/\sqrt{q_{0,n}q_{0,n+m}}$,其中 $q_{0,n}$ 由引理 1 确定.　(11)

上述(11)与下面的 m 阶和 n 阶连分式渐近式之差的公式[见 10]是不同的.

$$f_{n+m}-f_n=\frac{-f_m^{(n)}}{h_n+f_m^{(n)}}(f_n-f_{n-1})\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

这里 $h_n=-S_n^{-1}(\infty)$, $S_n(w)$由(1)定义(此时 $d=1$), $f_m^{(n)}=\frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+m}|}{|b_{n+m}}$.

下面的引理 2 在定理 4 的证明中用到.

引理 2 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\|\vec{b}_n\|=+\infty$,这里 $\vec{b}_n=(b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d)$,则至少存在一 $r(1\leqslant r\leqslant d)$,使得 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n^r|=+\infty$.

证明 用反证法,若对任意 $r(1\leqslant r\leqslant d)$,都有 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n^r|<+\infty$,则 $\sum_{r=1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n^r|<+\infty$,但 $\sum_{r=1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n^r|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|\vec{b}_n\|=+\infty$,因而矛盾.

3 连分式 $\mathop{K}\limits_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{\vec{b}_i})$ 的收敛的充分必要条件

在这一节,首先给出连分式 $\mathop{K}\limits_{i=1}^{\infty}(1/\vec{b}_i)$ 收敛的必要条件.

定理 3 连分式 $\mathop{K}\limits_{i=1}^{\infty}(1/\vec{b}_i)$ 收敛的必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|\vec{b}_n\|$ 发散.

证明 用反证法,设 $\sum_{n=1}^{\infty}\|\vec{b}_n\|=M, M>0$.

首先,用数学归纳法不难证明:

$$\sqrt{q_{0,n}}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(1+\|\vec{b}_k\|),\tag{12}$$

$$\sqrt{q_{0,n+1}}\leqslant\prod_{k=1}^{n+1}(1+\|\vec{b}_k\|).\tag{13}$$

利用不等式 $1+x\leqslant e^x, x>0$,(12),(13) 变为

$$\sqrt{q_{0,n}}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(1+\|\vec{b}_k\|)\leqslant\exp(\sum_{k=1}^{n}\|\vec{b}_k\|)\leqslant e^M,$$

$$\sqrt{q_{0,n+1}}\leqslant\prod_{k=1}^{n+1}(1+\|\vec{b}_k\|)\leqslant\exp(\sum_{k=1}^{n+1}\|\vec{b}_k\|)\leqslant e^M.$$

由定理 2 知 $\|\vec{S}_{1,n+1}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\|=1/\sqrt{q_{0,n}q_{0,n+m}}\geqslant e^{-2M}>0$,矛盾.

定理 4 对于连分式 $\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(1/\vec{b}_n)$,这里 $\vec{b}_n=(b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d)$,$b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d>0$,其收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|\vec{b}_n\|=+\infty$.

证明 必要性由定理 3 即得,下证充分性. 因为诸 $\vec{b}_n$ 只有有限个不为零,故不妨设 $\|\vec{b}_1\|\neq 0$.

由定理条件及(3),(5) 有:

$$q_{k,2n}\geqslant\|\vec{b}_{k+1}\|^2q_{k+1,2n}+q_{k+2,2n},\ k=0,1,\cdots,2n,\ q_{2n,2n}=1,\ q_{2n-1,2n}=\|\vec{b}_{2n}\|^2.\tag{14}$$

(14) 暗示

$$q_{0,2n} \geqslant q_{2,2n} \geqslant \cdots \geqslant q_{2n,2n} \geqslant 1, \tag{15}$$

$$q_{1,2n} \geqslant q_{3,2n} \geqslant \cdots \geqslant q_{2n-1,2n} = \|\vec{b}_n\|^2. \tag{16}$$

现考虑 $\vec{b}_k$, $\vec{p}_{k,n}$ 的第 $r(1 \leqslant r \leqslant d)$ 个分量，分别记为 $b_k(r)$，$p_{k,n}(r)$，由定理条件及(4)，(15) 得

$$p_{2k,2n}(r) = b_{2k}(r) \cdot q_{2k,2n} + p_{2k+1,2n}(r) \geqslant b_{2k}(r) + p_{2k+2,2n}(r),\ k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

从而有

$$p_{0,2n}(r) \geqslant b_0(r) + p_{2,2n}(r) \geqslant \cdots \geqslant b_0(r) + b_2(r) + \cdots + b_{2n}(r). \tag{17}$$

类似的有

$$\begin{cases} q_{0,2n+1} \geqslant q_{2,2n+1} \geqslant \cdots q_{2n,2n+1} \geqslant 1, \\ q_{1,2n+1} \geqslant q_{3,2n+1} \geqslant \cdots q_{2n-1,2n+1} \geqslant \|b_n\|^2, \\ p_{1,2n+1}(r) \geqslant b_1(r) + p_{3,2n+1}(r) \geqslant \cdots \geqslant b_1(r) + b_3(r) + \cdots + b_{2n-1}(r). \end{cases} \tag{18}$$

由引理 2，(17)，(18) 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\vec{b}_n\| = +\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{p}_{0,2n}\| = +\infty, \tag{19}$$

或

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{p}_{1,2n+1}\| = +\infty. \tag{20}$$

不失一般性，设(19) 成立. 由(5) 有

$$q_{0,m} \geqslant \|\vec{b}_1\|^2 q_{1,m}, \quad \forall\ m \geqslant 1. \tag{21}$$

由(21)，(7) 推出

$$\|\vec{p}_{0,2n}\| = q_{0,2n} q_{1,2n} \leqslant \frac{q_{0,2n}^2}{\|\vec{b}_1\|^2}. \tag{22}$$

从而由(19)，(22)，由

$$\lim_{n\to\infty} q_{0,2n} = +\infty \tag{23}$$

由定理 2，(4)，(15)，(16)，(21)，(23)有

$$\begin{aligned} \|\vec{S}_{1,2n+m}(\vec{0}) - \vec{S}_{1,2n}(\vec{0})\| &= \sqrt{q_{2n+1,2n+m}} / \sqrt{q_{0,2n} q_{0,2n+m}} \\ &\leqslant \frac{1}{\|\vec{b}_1\| \sqrt{q_{0,2n}}} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{S}_{1,2n+m}(\vec{0}) - \vec{S}_{1,2n-1}(\vec{0})\| &\leqslant \|\vec{S}_{1,2n+m}(\vec{0}) - \vec{S}_{1,2n(0)}\| + \|\vec{S}_{1,2n}(\vec{0}) - \vec{S}_{1,2n-1}(\vec{0})\| \\ &\leqslant \frac{1}{\|\vec{b}_1\| \sqrt{q_{0,2n}}} + \frac{1}{\sqrt{q_{0,2n}} \sqrt{q_{0,2n-1}}} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned} \tag{25}$$

由(24)，(25)知$\{\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\}$为 Cauchy 数列，故连分式 $\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\vec{b}_n})$收敛.

4 连分式的收敛的充分条件

下面把结论 2 推广到向量情形.

定理 5 设 $\vec{b}_n = (b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d)$，若 $b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d \geqslant 0$，$a_n > 0$，$n = 1, 2, \cdots$，且成立如

下不等式 $\|\vec{b}_n\| \geqslant a_n$, $n=1,2,\cdots$,且存在 $M>0$,满足 $\|\vec{b}_n\| \geqslant M$,则连分式 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{K}}\left(\frac{a_n}{\vec{b}_n}\right)$ 收敛到 $\vec{f}$,且一个收敛误差估计为

$$\|\vec{f}-\vec{f}_{1,n}(\vec{0})\| \leqslant (1+M^2)^{-n/2}(\sqrt{1+M^2}+1)\sqrt{1+M^2}/M^2. \tag{26}$$

证明 由定理条件及(4)有

$$q_{k,n} \geqslant \|\vec{b}_{k+1}\|^2 q_{k+1,n} \tag{27}$$

$$q_{k,n} \geqslant \|\vec{b}_{k+1}\|^2 q_{k+1,n} + a_{k+2}^2 q_{k+2,n}. \tag{28}$$

由(27),(28)有

$$q_{k,n} \geqslant \|\vec{b}_{k+1}\|^2 q_{k+1,n} + a_{k+2}^2 q_{k+2,n} \geqslant a_{k+2}^2(1+d^2) q_{k+2,n}. \tag{29}$$

从 $k=0$ 开始连续利用(29),有

$$\sqrt{q_{0,2n}} \geqslant a_2(1+M^2)^{1/2}\sqrt{q_{2,2n}} \geqslant a_2\cdots a_{2n}(1+M^2)^{n/2}\sqrt{q_{2n,2n}}. \tag{30}$$

若又考虑到(27),有

$$\begin{aligned}\sqrt{q_{0,2n+1}} &\geqslant \|\vec{b}_1\| \sqrt{q_{1,2n+1}} \geqslant \|\vec{b}_1\| a_3(1+M^2)^{1/2}\sqrt{q_{3,2n+1}} \\ &\geqslant \|\vec{b}_1\| a_3\cdots a_{2n+1}(1+M^2)^{n/2}\sqrt{q_{2n+1,2n+1}}.\end{aligned} \tag{31}$$

由题中条件及(30),(31)

$$\sqrt{q_{0,2n}}\sqrt{q_{0,2n+1}} \geqslant a_1a_2\cdots a_{2n+1}(1+M^2)^n \tag{32}$$

同理有

$$\sqrt{q_{0,2n-1}}\sqrt{q_{0,2n}} \geqslant a_1a_2\cdots a_{2n}(1+M^2)^{(2n-1)/2}. \tag{33}$$

由(32),(33)知

$$\sqrt{q_{0,n-1}}\sqrt{q_{0,n}} \geqslant a_1a_2\cdots a_n(1+M^2)^{(n-1)/2}, \tag{34}$$

由(34)及定理 2 知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\|\vec{S}_{1,n}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n+m}(\vec{0})\| &\leqslant \sum_{k=0}^{m-1}\|\vec{S}_{1,n+k}(\vec{0})-\vec{S}_{1,n+k+1}(\vec{0})\| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1}(1+M^2)^{-(n+k)/2} \\ &\leqslant (1+M^2)^{-n/2}(\sqrt{1+M^2}+1)\sqrt{1+M^2}/M^2 \to 0(n\to\infty).\end{aligned}$$

由上式知 $\{\vec{S}_{1,n}(\vec{0})\}$ 为 Cauchy 数列,故连分式 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{K}}\left(\frac{a_n}{\vec{b}_n}\right)$ 收敛. 同时在上式中令 $m\to\infty$,即得一个收敛误差估计.

参考文献:

[1] 朱功勤,顾传青. 向量连分式逼近与插值[J]. 计算数学,1992,**14**: 427-432.
ZHU Gong-qin, GU Chuan-qing. *Approximation and interpolation of vector valued continued fractions* [J]. Numer. Sinica., 1992, **14**: 427-432. (in Chinese)

[2] 顾传青. 关于广义逆的向量连分式插值样条 [J]. 数学研究与评论,1999,**19**: 1-8.
GU Chuan-qing. *On generalized inverse vector valued continued fraction interpolation splines* [J]. J.

Math. Res. Exposition, 1999, **19**: 1—8. (in Chinese)
[3] GRAVES-MORRIS P R. *Vector valued rational interpolants* I [J]. Numer. Math., 1983, **41**: 331-334.
[4] GRAVES-MORRIS P R. *Vector valued rational interpolants* II [J]. IMA J. Numer. Anal., 1984, **4**: 209—224.
[5] GRAVES-MORRIS P R. *Vector valued rational interpolants* III [J]. Constr. Approx., 1986, **2**: 263—289.
[6] 朱功勤,檀结庆,王洪燕. 预给极点的向量有理插值及性质 [J]. 高等学校计算数学学报, 2000, **22**: 97—104.
ZHU Gong-qin, TAN Jie-qing, WANG Hong-yan. *Algorithms and properties of vector valued rational interpolants with prescribed poles* [J]. Numer. Math. J. Chinese Univ., 2000, **22**: 97—104. (in Chinese)
[7] GU Chuan-qing. *Bivariate Thiele-type valued rational interpolants* [J]. J. Comp. Appl. Math., 1997, **80**: 71—82.
[8] GU Chuan-qing. *Multivariate generalized inverse vector-valued rational interpolants* [J]. J. Comp. Appl. Math., 1997, **84**: 137—146.
[9] 朱功勤,顾传青. Thiele 型向量连分式的收敛性定理 [J]. 数学研究与评论, 1990, **10**: 523—526.
ZHU Gong-qin, GU Chuan-qing. *Convergence theorems of Thiele-type vector continued fractions* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1990, **10**: 523-526. (in Chinese)
[10] LORENTZEN L, WAADELAND H. *Continued Fractions with Applications* [M], Amsterdam: Elsevier, 1992.
[11] 赵欢喜. 一种新的连分式求值方法 [J]. 中南工业大学学报, 2000, **31**(2): 188—189.
ZHAO Huan-xi. *A new evaluation method of continued fractions* [J]. J. Cent. South. Univ. Technol., 2000, **31**(2): 188—189. (in Chinese)
[12] CUYT A, WUYTACK L. *Nonlinear Methods in Numerical Analysis* [M]. Elsevier Science Publisher: Amsterdam, 1988.

Necessary and Sufficient Conditions for Convergence of Vector Continued Fractions with Positive Elements

XIAO Ping[1], ZHAO Huan-xi[1,2]

(1. School of Mathematics, Central South University, Changsha 410083, China;
2. Dept. of Math., University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Vector valued continued fractions of the form

$$\vec{b}_0 + \mathop{K}_{n=1}^{\infty}(a_n/\vec{b}_n) \qquad (\#)$$

are considered, where $\vec{b}_n = (b_n^1, b_n^2, \cdots, b_n^d)$ satisfy Samelson inverse and a_n, b_n^1, b_n^2, $\cdots$, b_n^d are positive. A few necessary and sufficient conditions for the convergence of (#) are obtained. Moreover, a truncation error estimation is given.

Key words: vector valued continued fractions; convergence; truncation error estimation.