第24卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 24 No. 4
2004年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2004

确定代数方程根位置的快速无除算法*

冯　琴　荣
（山西师范大学数计学院，山西 临汾 041004）

摘　要：本文提供了一个确定整系数代数方程在指定区域内根的个数的快速无除算法，此算法的复杂性为 $O(n^2)$，其中 n 为方程的次数. 为了强调算法的稳定性，本文均用精确的整数运算. 其中多项式是无平方的、首一的.

关键词：Bezout 矩阵；多项式余项序列；矩阵惯性；无平方.
分类号：AMS(2000) 65Y99/CLC number：O212.5
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0728-05

1　引　言

确定代数方程根的位置是一个古老的问题，它有着广泛的应用，比如，多项式的两个稳定性问题(Routh-Hurwitz 问题和 Schur－Cohn 问题). 在[1]中作者把此问题化为计算 Bezout 矩阵的惯性，并给出一个算法，但此算法是不稳定的. Hermite 研究了代数方程的根关于实轴分布的情况. 在[2]中作者揭示了由 $u(x)$ 和 $v(x)$ 生成的 Bezout 矩阵的惯性和对 $u(x)$ 和 $v(x)$ 使用 Euclid 算法所得到的商序列中每个商的首系数的符号间的关系.

本文利用 Hermite 的结果和[2]中的算法，在整数环上讨论代数方程的根关于复平面上任意矩形区域分布的情况. 给出了一个快速无除算法，算法的复杂性为 $O(n^2)$. 此算法还可以用来解决许多其他问题.

令 $u(x)=\sum_{i=0}^{n}u_ix^i, v(x)=\sum_{i=0}^{n-1}v_ix^i$ 为两个整系数多项式，对 $u(x)$ 和 $v(x)$ 使用 Euclid 算法所生成的多项式序列 $r_i(x)$、$q_i(x)$ 满足

$$\begin{aligned} &r_0(x)=u(x),\quad r_1(x)=v(x),\\ &r_{i-1}(x)=r_i(x)q_i(x)-r_{i+1}(x),\quad i=1,\cdots,L,\\ &r_{L+1}(x)=0,\quad \deg(q_i(x))=\delta_i,\quad 1\leqslant i\leqslant L,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $-r_{i+1}(x)$ 是 $r_{i-1}(x)$ 除以 $r_i(x)$ 的余项，$r_L(x)$ 是 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的最大公因子 (gcd).

为了简化，假设本文中所有的多项式均为无平方的、首一的整系数多项式. 下面我们先介

* **收稿日期**：2002-01-16
基金项目：山西师范大学科学研究基金资助项目.
作者简介：冯琴荣(1972-)，女，硕士，讲师.

绍一些有关 Bezoutian 的知识.

2 Bezoutian

Bezoutian 是一个特殊的二次型，它是由一对多项式定义的.

令 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是两个次数分别为 n 和 m 的多项式，其中 $n > m$，表示式

$$\frac{u(x)v(y) - v(x)u(y)}{x - y} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j} x^{i-1} y^{j-1}$$

是关于 x 和 y 的多项式. $n \times n$ 矩阵 $B(u,v) = (b_{i,j})_{n\times n}$ 称为 Bezout 矩阵或 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的 *Bezoutian*.

矩阵 $B(u,v)$ 可以表示为以下形式

$$B(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_2 & \cdots & u_n & \\ \vdots & \iddots & & \\ u_n & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \\ & v_0 & \cdots & v_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_2 & \cdots & v_n & \\ \vdots & \iddots & & \\ v_n & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \\ & u_0 & \cdots & u_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_0 \end{pmatrix}$$

其中如果 $j > m$，我们令 $v_j = 0$，从此表示式中可以看出 $B(u,v)$ 的元素是关于 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的系数的双线性函数，可以通过以下递归公式来计算

$$b_{i,j+1} = b_{i+1,j} + u_i v_j - v_i u_j, \tag{2}$$

初始条件为 $b_{j,0} = b_{n+1,j} = 0$. 反过来，给定 Bezout 矩阵 B 的元素，可以计算出 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的系数使得 $B = B(u,v)$，特别 B 的最后一行，即 $u_n[v_0, \cdots, v_{n-1}]$ 给出了 $v(x)$ 的次数 m 和系数.

联系 Bezoutian 与 Euclid 算法的重要概念是 Schur 补. 假设我们把矩阵 A 分割成四块 $A_{i,j}, i,j = 1,2$，其中 $A_{1,1}$ 是 $k \times k$ 的，且是非奇的，$A_{1,1}$ 在 A 中的 Schur 补为矩阵 $S = A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}$，这是对 A 执行一步块 Gauss 消去法得到的.

Schur 补与 Euclid 算法(1)的关系依赖于下面的命题.

命题 1 $\hat{B} = J_n B(u,v) J_n$ 的 $k \times k$ 首主子阵 $\hat{B}_k$ 是非奇的，当且仅当存在整数 $i, 1 \leqslant i \leqslant L$，使得 $k = m_i = n - \deg(r_i(x))$. 而且，$\hat{B}_{m_i}$ 在 $\hat{B}$ 中的 Schur 补 $S_{m_i} \in Q^{(n-m_i)\times(n-m_i)}$ 满足

$$S_{m_i} = J_{n-m_i} B(r_i, r_{i+1}) J_{n-m_i}, \quad 1 \leqslant m_i \leqslant n, \tag{3}$$

其中 J_n 是 $n \times n$ 反对角线全为 1 的置换阵.

3 确定代数方程根的位置

下面给出一个纯代数的方法来确定整系数代数方程在复平面上任意矩形区域内根的个数，其中矩形的顶点坐标均为整数，且矩形的边平行于坐标轴.

令 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in Z[x]$，记 $f(x)$ 的根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，如何确定 $f(x)$ 在任意矩形区域 $abcd$ 内根的个数？

令 $V(k)$ 记当坐标原点平移到 k 时 $f(x)$ 在第一象限内根的个数，其中 $k=a,b,c,d$，从图 1，可以得到 $f(x)$ 在 $abcd$ 内根的个数等于

$$V(a)-V(b)-V(d)+V(c),\tag{4}$$

如果 $V(k)$ 记当坐标原点平移到 $k(k=a,b,c,d)$ 时 $f(x)$ 在第三象限内根的个数，则上述结论同样成立.

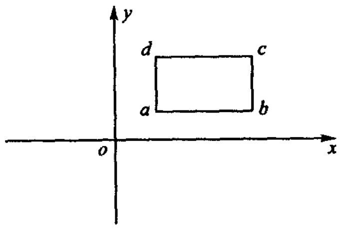

图 1

所以令 $V(k)$ 记当坐标原点平移到 $k(k=a,b,c,d)$ 时 $f(x)$ 在第一、三象限内根的个数，则我们可以得到 $f(x)$ 在 $abcd$ 内根的个数等于

$$\frac{1}{2}(V(a)-V(b)-V(d)+V(c)).\tag{5}$$

如何确定当坐标原点平移到 $k(k=a,b,c,d)$ 时，$f(x)$ 在第一、三象限内根的个数呢？

Hermite 解决了下面的问题：给定任意复系数多项式方程

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0=0,$$

如何确定这个方程在上半平面有多少个根？

他令

$$\bar{f}(x)=\bar{a}_nx^n+\bar{a}_{n-1}x^{n-1}+\cdots\bar{a}_1x+\bar{a}_0=0.$$

显然 $\bar{f}(x)$ 的每个根与 $f(x)$ 的根共轭，反之亦成立. 因此 $f(x)$ 的任何一个实根也是 $\bar{f}(x)$ 的根，并且如果 $f(x)$ 有一对共轭复根，这对共轭复根也是 $\bar{f}(x)$ 的根. 因此 $f(x)$ 的任何一个实因子也是 $\bar{f}(x)$ 的因子，且 $f(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 没有其他的公因子. 为了方便，用 $A(f)=iB(f,\bar{f})$ 代替 $B(f(x),\bar{f}(x))$，这个矩阵显然是实对称的，且 $i^2=-1$.

如果记 $f(x)=g(x)+ih(x)$，其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 均为实系数多项式，假设 $g(x)$ 的次数不小于 $h(x)$ 的次数，否则的话，可以用 $if(x)$ 代替 $f(x)$. 从等式

$$-i\frac{f(x)\bar{f}(y)-f(y)\bar{f}(x)}{x-y}=-2\frac{g(x)h(y)-g(y)h(x)}{x-y}$$

可得

$$A(f)=2B(g,h).\tag{6}$$

Hermite 证明了下面的结果：

命题 2 (Hermite) 矩阵 $A(f)$ 的核等于 $f(x)$ 的实根个数加上共轭复根的个数，重根按不同的根计，$A(f)$ 的符号差等于 $f(x)$ 的严格位于实轴上方的根的个数减去 $f(x)$ 的严格位于实轴下方的根的个数.

令 $f(x)$ 被分解为它的最高次实因子和线性因子的乘积，每个线性因子对应于一个非共轭的复根. 实因子对秩和符号差没有影响，但每个不成对的复线性因子使秩增加 1，且根据它虚部的符号使符号差加 1 或减 1.

以下利用上面的结果来解决本文提出的问题，令 $f(x)$ 为首一的整系数多项式，$abcd$ 是复平面上任意矩形区域，它的顶点坐标为 (ξ_j,η_k)，$j,\kappa=1,2$，在 $f(x)$ 中用 $x-(\xi_j+i\eta_k)$ 代替 x，记得到的多项式为 $g(x)$，显然 $g(x)$ 是一个高斯整系数多项式，记它的根为 $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_n$，且记

根为 $\beta_1^2,\beta_2^2,\cdots,\beta_n^2$ 的多项式为 $F(x)$，那么 $g(x)$ 与 $F(x)$ 之间有何关系呢？

令 $\beta = a + ib$，则 $\beta^2 = a^2 - b^2 + i2ab$，由此我们可以得到表 1.

表 1

$g(x)$	实根	纯虚根	复根($a+ib,a=\pm b$)	其它
	$\searrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$F(x)$	实根		纯虚根	复根

显然从这个关系中我们可以得到以下结果：

$F(x)$ 的虚部为正的复根对应于 $g(x)$ 的位于一、三象限的根，$F(x)$ 的虚部为负的复根对应于 $g(x)$ 的位于二、四象限的根.

记 $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$，则我们有 $B(F_1,F_2)$ 的正平方个数等于 $g(x)$ 的位于一、三象限内根的个数，$B(F_1,F_2)$ 的负平方个数等于 $g(x)$ 的位于二、四象限内的根的个数.

则我们有以下定理：

定理 1 令 $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ 是如上定义的首一高斯整系数多项式，记它的根为 $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_n$，令 $\beta_1^2,\beta_2^2,\cdots,\beta_n^2$ 为 $F(x)$ 的根，记 $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$，$abcd$ 是复平面上任意矩形区域，则 $B(F_1,F_2)$ 的正(负)平方个数等于 $g(x)$ 的位于矩形区域内(外)的根的个数.

证明 从上面的讨论很容易得到此结论.

下面观察 $g(x)$ 和 $F(x)$ 的系数之间的关系，即如何从 $g(x)$ 的系数得到 $F(x)$ 的系数？有以下结果：

定理 2 令 $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ 是如上定义的首一高斯整系数多项式，记它的根为 $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_n$，令 $\beta_1^2,\beta_2^2,\cdots,\beta_n^2$ 为 $F(x)$ 的根，记 $F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，则 $g(x)$ 和 $F(x)$ 的系数之间有以下关系：

$$a_n = 1, a_0 = b_0^2,$$

$$a_{i-1} = b_{i-1}^2 - 2b_{i-2}b_i, \quad i = 2,\cdots,n.$$

证明 这可由根与系数关系得到.

我们需要解决的另一个问题是：令 $f(x)$ 是一整系数多项式，在 $f(x)$ 中用 $x - (\xi_j + i\eta_k)$ 代替 x，记得到的多项式为 $g(x)$，如何计算 $g(x)$ 的系数呢？对此我们可以根据变量移位来记算 $g(x)$ 的系数，参看[3].

4 算 法

下面给出本文的主要算法：

算法 (确定给定代数方程在指定矩形区域内根的个数)

输入：首一整系数多项式 $f(x)$ 的系数和指定矩形区域的顶点坐标.

输出：$f(x)$ 在指定矩形区域内根的个数.

1. 在 $f(x)$ 中用 $x - (\xi + i\eta)$ 代替 x，我们得到复多项式 $f(x - (\xi + i\eta))$，记得到的多项式为 $g(x)$.

2. 根据变量移位来计算 $g(x)$ 的系数.

3. 由定理 2,根据 $g(x)$ 的系数计算 $F(x)$ 的系数.

4. 记 $F(x)=F_1(x)+iF_2(x)$,分别用指定矩形区域的顶点坐标(ξ_1,η_1)、(ξ_1,η_2)、(ξ_2,η_1)和(ξ_2,η_2)来代替(ξ,η),然后根据(2)式计算 $B(F_1,F_2)$,再根据[4]中的算法计算 $B(F_1,F_2)$ 的正平方个数.

5. 根据(5)式,我们可以得到结果并输出.

算法的复杂性分析:

第 2 步最多 $O(n)$ 次运算,第 3 步最多 $2n$ 次乘法,第 4 步的算术运算是 $O(n^2)$. 第 4 步的惯性计算可由[4]中给出的算法得到,这个算法需要 $O(n^2)$ 算术运算,算法中涉及的整数最多 $O(n\log nc)$ 位,其中 c 是矩阵 $B(F_1,F_2)$ 的整元素的模的上界,该算法的运算量主要是由计算 $B(F_1,F_2)$ 的惯性决定的.

注　这是一个快速且稳定的算法,如果想让所有的运算均为整数环上的运算,则给定的矩形顶点坐标必须为整数,否则将引入实数运算. 显然此算法对高斯整系数多项式仍适用. 此算法可用来解决许多其他问题,如 Routh-Hurwitz 问题,确定代数方程的不同实根的个数和不同对共轭复根的对数等等.

参考文献:

[1] KREIN M G, NAIMARK M A. *The method of symmetric and hermitian forms in the theory of the separation of roots of algebraic equations* [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1981, **10**: 265-308.

[2] BINI D. GEMIGNANI L. *Computationally efficient application of the euclidean algorithm to zero location* [J]. Linear Algebra and Its Application, 1996, **249**: 79-91.

[3] BINI D, PAN V. *Polynomial and Matrix Computations, Fundamental Algorithms* [M]. Birkhauser, Boston, 1994, **1**: 157-159.

[4] FENG Qin-rong, *A fast method to compute the inertia of Bezout matrix and its application* [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2001, **16**(1): 52-58.

A Fast Fraction-Free Method to Determine the Zero-Location of Algebraic Equation

FENG Qin-rong

(College of Math. & Comp. Sci., Shanxi Normal University, Linfen 041004, China)

Abstract: In this paper, we present a fast and fraction-free procedure for determining the zero-location of an algebraic equation with integer coefficients in any rectangle area in complex plane, where the polymomial is squarefree and monic, and the coordinates of the vertices of the rectangle are integers. In order to address the stability problems, we use exact arithmetic only.

Key words: Bezout matrix; prs (polynomial remainder sequence); matrix inertia; squarefree.