第 24 卷第 4 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 4
2004年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2004

二阶非线性差分方程的振动定理*

何 延 生[1]，　俞 元 洪[2]

(1. 延边大学师范学院数学系，吉林 延吉 133002；2. 中国科学院应用数学研究所，北京 100080)

摘　要：本文建立了二阶非线性差分方程新的振动准则. 所得定理推广和改进了文献中的结果. 并且给出了说明定理应用的例子.

关键词：差分方程；非线性；振动.

分类号：AMS(2000) 39A10/CLC number：O175.12

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0740-05

0 引 言

考虑二阶非线性差分方程

$$\Delta^2 x_{n-1} + p_n f(x_n) = 0, \quad n = 1, 2 \cdots, \tag{1}$$

其中$\{p_n\}$为实数序列，$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$，$\Delta^2 x_{n-1} = \Delta(\Delta x_{n-1})$. f 是实轴上的连续函数，且当 $x \neq 0$ 时有 $xf(x) > 0$. 并且对一切 $u, v \neq 0$ 时满足等式 $f(u) - f(v) = \varphi(u, v)(u - v)$，其中 φ 是非负函数，且满足不等式

$$\varphi(u, v) \geqslant b > 0, \quad \forall\, u, v \neq 0, \tag{2}$$

其中 b 为常数，由函数 φ 的非负性知，f 是区间$(0, \infty)$和$(-\infty, 0)$上的非减函数.

我们称满足方程(1)的实数序列$\{x_n\}$，$n = 0, 1, \cdots$为方程(1)的一个解. 方程(1)的一个非平凡解$\{x_n\}$称为非振动的，如果存在自然数 $N \geqslant 0$ 使对一切 $n \geqslant N$，恒有 $x_{n+1} x_n > 0$；否则称它为振动的，方程(1)称为振动的，如果其一切解振动.

下面列出文献中的曾用到的一些条件，其中 N 为正整数：

$$\sum_{j=N}^{\infty} p_j < \infty, \tag{3}$$

$$\liminf_{n \to \infty} \alpha_n > -\frac{1}{b}, \tag{4}$$

其中 b 同(2)式，$\alpha_n = \sum_{j=n}^{\infty} p_j$.

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^2}{1 + b\alpha_j^+} = \infty, \tag{5}$$

---

* **收稿日期**：2002-05-28

作者简介：何延生(1962-)，男，副教授.

其中 b 同(2)式，$\alpha_j^+ = \max\{\alpha_j, 0\}$ 和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{K=N}^{n}\sum_{j=k+1}^{\infty} p_j = \infty. \tag{6}$$

在不假设$\{p_n\}$非负的条件下，文[2]和[3]证明了如下结果：

定理 A[2]　设条件(2)－(5)成立．则方程(1)是振动的．

定理 B[3]　设 f 为超线性函数，且条件(3)和(6)成立．则方程(1)振动的．

我们注意到在证明方程(1)的振动定理时，大多数作者均假设条件(3)成立，本文目的是在既不假设$\{p_n\}$为非负又不假设(3)成立的条件下来建立方程(1)的振动准则．

1　主要结果

定理　设(2)成立且存在序列$\{\beta_n\}$满足

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=N}^{n} p_j \geqslant \beta_N, N \text{ 充分大} \tag{7}$$

和

$$\sum_{j=N}^{\infty}\frac{(\beta_j^+)^2}{1+b\beta_j^+} = \infty, \tag{8}$$

其中 $\beta_n^+ = \max\{\beta_n, 0\}$，$b$ 由(2)给出，则方程(1)振动．

证明　设方程(1)存在非振动解$\{x_n\}$，不失一般性，不妨设$\{x_n\}$最终为正．则存在整数 $N \geqslant 0$ 使当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n > 0$．现定义 V_n 如下：

$$V_n = \frac{\Delta x_{n-1}}{f(x_{n-1})}, n \geqslant N+1,$$

利用方程(1)，得

$$\Delta V_n = -p_n - \frac{\Delta x_{n-1}\Delta f(x_{n-1})}{f(x_{n-1})f(x_n)}, \quad n \geqslant N+1. \tag{9}$$

由(9)我们有

$$V_{n+1} - V_{N+1} = -\sum_{j=N+1}^{n} p_j - \sum_{j=N+1}^{n}\frac{(\Delta x_{j-1})^2\varphi(x_{j-1}, x_j)}{f(x_{j-1})f(x_j)}. \tag{10}$$

由于$\dfrac{(\Delta x_{n-1})^2\varphi(x_{n-1}, x_n)}{f(x_{n-1})f(x_n)} \geqslant 0, n \geqslant N+1$，推知

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{(\Delta x_{j-1})^2\varphi(x_{j-1}, x_j)}{f(x_{j-1})f(x_j)} = \infty, \tag{11}$$

或者

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{(\Delta x_{j-1})^2\varphi(x_{j-1}, x_j)}{f(x_{j-1})f(x_j)} < \infty. \tag{12}$$

假设(11)成立，则由(10)知

$$\lim_{n\to\infty} V_n = -\infty. \tag{13}$$

另一方面，因 $f(u) - f(v) = \varphi(u, v)(u - v)$，$u, v \neq 0$，故有 $f(x_n) - f(x_{n-1}) = \varphi(x_n, x_{n-1})\Delta x_{n-1}$，$n \geqslant N+1$．则由条件(2)，我们有

$$V_n = \frac{\Delta x_{n-1}}{f(x_{n-1})} = \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})\varphi(x_n, x_{n-1})} - \frac{1}{\varphi(x_n, x_{n-1})}$$

$$> \frac{f(x_n)}{f(x_n)\varphi(x_n, x_{n-1})} - \frac{1}{b} > -\frac{1}{b}, \quad n \geqslant N+1, \tag{14}$$

显然,(14)与(13)矛盾. 故(11)不可能成立.

现考虑(12)成立,则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\Delta x_{n-1})^2 \varphi(x_{n-1}, x_n)}{f(x_{n-1}) f(x_n)} = 0$$

或

$$\lim_{n\to\infty} V_n^2 \frac{\varphi(x_{n-1}, x_n) f(x_{n-1})}{f(x_n)} = 0, \tag{15}$$

现 V_n^2 有两种可能:$\limsup\limits_{n\to\infty} V_n^2 = M > 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \cdot V_n^2 = 0$,若前一情况成立. 则存在子序列 $\{n_k\}$ 使当 $k\to\infty$ 时有 $n_k\to\infty$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} V_{n_k}^2 = M$. 联合(15)和(2)产生

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k-1})}{f(x_{n_k})} = 0$$

则存在整数 K,使当 $k \geqslant K$ 时有

$$f(x_{n_k-1}) < f(x_{n_k}). \tag{16}$$

注意到 f 在区间 $(0,\infty)$ 上非减,故由(16)可知,$x_{n_k} > x_{n_k-1}, k \geqslant K$;此即 $\Delta x_{n_k-1} > 0, k \geqslant K$. 因此,$V_{n_k} > 0, k \geqslant K$. 令 $K_1 \geqslant K$ 为整数,使得当 $k \geqslant K_1$ 时有 $n_k > N+1$. 则在(10)中用 n_k 代替 n,我们有

$$V_{n_k} - V_{N+1} = -\sum_{j=N+1}^{n_k-1} p_j - \sum_{j=N+1}^{n_k-1} \frac{(\Delta x_{j-1})^2 \varphi(x_{j-1}, x_j)}{f(x_{j-1}) f(x_j)}, \quad k \geqslant K_1,$$

因此有

$$V_{N+1} \geqslant \sum_{j=N+1}^{n_k-1} p_j + \sum_{j=N+1}^{n_k-1} \frac{(\Delta x_{j-1})^2 \varphi(x_{j-1}, x_j)}{f(x_{j-1}) f(x_j)}, \quad k \geqslant K_1.$$

在上式中令 $k\to\infty$ 取下极限得到

$$V_n \geqslant \beta_n + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\Delta x_{j-1})^2 \varphi(x_{j-1}, x_j)}{f(x_{j-1}) f(x_j)} > \beta_n, n \geqslant N+1. \tag{17}$$

另一方面,如果 $\lim\limits_{n\to\infty} V_n^2 = 0$ 则 $V_n \to 0$,当 $n\to\infty$. 对(10)式令 $n\to\infty$ 两边取上极根,利用(7)我们仍然有(17)成立

现定义子序列如下:$\{j_k\}_{k=1}^{\infty} = \{j \geqslant N+1 : \beta_j \geqslant 0\}$ 且 $j_k\to\infty$ 当 $k\to\infty$. 则由(17)得

$$V_{j_k} \geqslant \beta_{j_k}, j_k \geqslant N+1. \tag{18}$$

注意到不等式(14),我们有

$$\frac{f(x_{j_k-1})\varphi(x_{j_k-1}, x_{j_k})}{f(x_{j_k})} \geqslant \frac{b}{bV_{j_k}+1}, j_k \geqslant N+1, \tag{19}$$

因函数 $F(x) = \dfrac{x^2}{bx+1}$ 在区间 $[0,\infty)$ 上单增,故由(18)和(19)产生

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\Delta x_{j-1})^2 \varphi(x_{j-1}, x_j)}{f(x_{j-1}) f(x_j)} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta x_{j_k-1})^2 \varphi(x_{j_k-1}, x_{j_k})}{f(x_{j_k-1}) f(x_{j_k})}$$

$$\geqslant b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{V_{j_k}^2}{bV_{j_k}+1}=b\sum_{k=1}^{\infty}F(V_{j_k})$$

$$\geqslant b\sum_{k=1}^{\infty}F(\beta_{j_k})=b\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(\beta_j^+)^2}{b\beta_j^++1}, \tag{20}$$

由(12)和(20),我们得到

$$b\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(\beta_j^+)^2}{b\beta_j^++1}<\infty,\quad n\geqslant N+1.$$

上式与条件(8)矛盾,故在定理条件下方程(1)不可能有非振动解. □

推论 1 设(2)和(7)成立,且

$$\sum^{\infty}(\beta_j^+)^2=\infty, \tag{21}$$

则方程(1)振动.

证明 略.

推论 2 设(2)成立,且

$$\lim\sup\sum^{n}p_j=\infty, \tag{22}$$

则方程(1)振动.

证明 在定理 1 的证明中我们得到(10)和(14). 但是,由(10)和(22)推知$\underline{\lim}_{n\to\infty}\inf V_n=-\infty$,此与(14)式矛盾. □

例 1 设在(1)中 $p_n=(-1)^n\frac{2n^2+8n+7}{(n+1)(n+2)}-\Delta\frac{1}{(n+1)^{1/2}}$,则有

$$\sum_{j=N}^{n}p_j=(-1)^n+\frac{(-1)^n}{n+2}-\frac{1}{(n+2)^{1/2}}+(-1)^N+\frac{(-1)^N}{N+1}+\frac{1}{(N+1)^{1/2}},$$

因此

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=N}^{n}p_j=-1+(-1)^N+\frac{(-1)^N}{N+1}+\frac{1}{(N+1)^{1/2}},\quad N\geqslant 1.$$

定义序列$\{\beta_n\}$如下:

$$\beta_n=-1+(-1)^n+\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}},\quad n\geqslant 1,$$

故条件(7)成立. 且有

$$\beta_n^+=\begin{cases}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^{1/2}}, & n\text{ 偶数},\\ 0, & n\text{ 奇数},\end{cases}$$

故有

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j^+)^2\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j+1}=\infty.$$

由推论 1 知,当取例 1 中的$\{p_n\}$时,方程(1)振动.

注 1 我们注意到文[1]—[3]中的定理均不能判断例 1 中方程的振动性.

例 2 考虑差分方程

$$\Delta^2 x_{n-1} + (1 + n\sin\frac{(n-1)\pi}{2})(x_n + x_n^3) = 0,\ n = 1,2,\cdots,$$

对此方程，条件(2)成立只须取 $b=1$ 即可，此时

$$\sum_{j=N}^{n} p_j = (n+1)(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{(N-1)\pi}{2} + N(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{(2N-3)\pi}{4}),$$

因此 $\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=N}^{n} p_j = \infty$. 故条件(22)成立，因此，由推论 2 知例 2 的方程是振动的.

注 2 推论 2 推广和改进了文[3]和[4]的有关结果.

参考文献:

[1] HOOKER J W, PATULA W T. *A Second-order nonlinear difference equation: oscillation and asymptotic behaviour* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1983, **91**: 9—29.

[2] THANDAPANI E, GYÖRI I, LALLI B S. *An application of discrete inequality to second order nonlinear oscillation* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **186**: 200—208.

[3] ZHANG B G, CHEN G D. *Oscillation of certain second order nonlinear difference equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, **199**: 827—841.

[4] GRACE S R, ABADEER A A, EL-MORSHEDY H A. *On the oscillation of certain second order difference equations* [J]. Comm. Appl. Anal., 1998, **2**: 447—456.

Oscillation Theorem for Second Order Nonlinear Difference Equations

HE Yan-sheng[1], YU Yuan-hong[2]

(1. Dept. Math., Teacher's College, Yanbian University, Yanji 133002, China;
2. Inst. Appl. Math., Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: Some new oscillation criteria are given for the second order nonlinear difference equations. These criteria extend and improve some existing results in the literature. Examples, which illustrate the importance of results, are included.

Key words: difference equations; nonlinear; oscillation.