第24卷第4期
2004年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 4
Nov. 2004

Liénard 系统的比较定理*

刘 炳 文
(湖南文理学院数学系，湖南 常德 415000)

摘 要：研究了 Liénard 方程的一类新的等价系统解的有界性与周期解的存在性. 证明了几个比较定理，使传统 Liénard 方程等价系统解的有界性和周期解的存在性可用于判定新等价系统解的有界性与周期解的存在性.

关键词：Liénard 系统；有界性；周期解；比较定理.
分类号：AMS(2000) 34C26/CLC number：O175.12
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)04-0745-06

1 引 言

关于 Liénard 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0 \tag{1}$$

解的有性结论已经相当丰富[1－9]. 由于 Liénard 方程在实际应用中的现实意义，使得在放松已有结论的条件下，继续研究方程(1)解的有界性仍是一项重要而有意义的工作. 本文通过对方程(1)的两种等价系统的比较，发展并运用了文[5,6]中的方法，证明了几个比较定理，使已知结论的条件可以适当地放松，从而使已知结论的运用更加地灵活，并且有些比较定理还可以相应地用到某些已知的关于(1)的周期解存在性的结论上去.

若存在连续函数 $f_1(x)$，可微函数 $\varphi(x)$ 使

$$f(x)=f_1(x)+\frac{d\varphi(x)}{dx}, \tag{2}$$

令

$$y=\frac{dx}{dt}+\varphi(x),\quad g_1(x)=g(x)-f_1(x)\varphi(x), \tag{3}$$

则(1)可以化为等价系统

$$\frac{dx}{dt}=y-\varphi(x),\quad \frac{dy}{dt}=-f_1(x)y-g_1(x). \tag{4}$$

---

* 收稿日期：2001-04-15
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10371034)
作者简介：刘炳文(1971-)，博士研究生.

在(2)中若令 $f_1(x)\equiv 0$,则(4)即为(1)在著名的 Liénard 变换下的等价系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-\varphi(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x). \tag{5}$$

为了方便,总假设(4),(5)右端的函数连续且分别满足(4),(5)的解关于初值问题存在唯一的条件,设$(x(t),y(t))$为(4)或(5)的任意初值问题解,最大右存在区间为$[t_0,T)$,其中 T 可为$+\infty$.记

$$G_1(x)=\int_0^x g_1(u)\mathrm{d}u,F_1(x)=\int_0^x f_1(u)\mathrm{d}u,V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x(g_1(u)+f_1(u)\varphi(u))\mathrm{d}u.$$

2 有关引理

由文[5,6]的引理 2.1—2.2,我们可获得下列结果:

引理 1 $\forall q_1<q_2,C>0$,存在 $D>C$,使$\forall r\geqslant D$ 时,过$(x(t_0),y(t_0))=(q_1,r)$或$(q_2,-r)$)的(4)或(5)的轨线$(x(t),y(t))$的正半轨线必有 $x=q_2$(或 $x=q_1$)相交于 $t_1>t_0$ 且$\forall t\in[t_0,t_1]$都有 $y(t)>C$(或 $y(t)<-C$).

由[9]中有界轨线的极限集理论我们容易得到

引理 2 若(5)的所有解正向有界,则过$(x_0,y_0)\in S_1=\{(x,y):x\geqslant 0,y>\varphi(x)\}$(或 $S_1^1=\{(x,y):x\leqslant 0,y<\varphi(x)\}$)的(5)的正半轨线必与曲线 $y=\varphi(x)$相交于一点或趋向于某一奇点$(x^*,y^*)\in S_2=\{(x,y):x>0,y=\varphi(x),g(x)=0\}$(或 $S_2^1=\{(x,y):x<0,y=\varphi(x),g(x)=0\}$).

3 主要结果

定理 1 若(5)的所有解正向有界,且

(H_1) $\forall x\in R,g(x)=g_1(x)+f_1(x)\varphi(x)$,

(H_2) 存在 $a<0<b$,使 $F_1(b)-F_1(a)>0$ 且$\forall x\notin[a,b]$时,$f_1(x)\geqslant 0$,

(H_3) 存在 $d\geqslant 0$,当$|x|\geqslant d$ 时,$g_1(x)\varphi(x)\geqslant 0$,

则(4)的所有解也正向有界.

证明 设当$t=t_0$时(4)过点 $P_0=(x_0,y_0)$的正半轨线 $L^+(P_0)_{(4)}:(x(t),y(t))$无界.下证$L^+(P_0)_{(4)}$最终绕原点盘旋.

令

$$\begin{aligned}&C_0=1+\max\{|a|,b,|x_0|,|y_0|,d\},\\&M_0=\max\{|f_1(x)|,|g_1(x)|,|\varphi(x)|:|x|\leqslant C_0\},\\&C_1=\max\{C_0,M_0\}+1.\end{aligned}$$

可以选择 $C_2>C_1,\epsilon>0$ 使$\frac{M_0}{C_2}<\frac{1}{2}$,当$|y|\geqslant C_2$ 时,$\frac{1}{|y|}<\epsilon$,且

$$-[F_1(b)-F_1(a)]+\frac{2C_0M_0^2}{C_2-M_0}+4M_0C_0\epsilon<0, \tag{8}$$

由引理 1 有，对 $-C_0<C_0,C_2>0$，存在 $D>C_2$，使(4)过点 $P_1=(-C_0,D+n)$（其中 n 为任意给定的正整数）的正半轨线 $L^+(P_1)_{(4)}$ 与 $x=C_0$ 相交于点 $P_2=(C_0,y_{P_2})$，且轨线段 $\widehat{P_1P_2}$ 在 $y=C_2$ 的上方，又由引理 2 知，过 P_2 的(5)的有界正半轨线 $L^+(P_2)_{(5)}$ 必相交或趋向于曲线 $y=\varphi(x)$ 上一点 $P_3=(x_{P_3},y_{P_3})$，且轨线段 $\widehat{P_2P_3}$ 在 $x=C_0$ 的右旁，于是由引理 1 可知，在 $x=x_{P_3}$ 上可选取一点 $P_4=(x_{P_3},y_{P_4})$，使 $L^+(P_4)_{(4)}$ 与 $x=-C_0$ 相交于点 $P_5=(-C_0,y_{P_5})$，且 $\widehat{P_4P_5}$ 在 $y=-l_2$ 的下方. 进而有过点 P_5 的(5)的有界正半轨 $L^+(P_5)_{(5)}$ 必相交或趋向于曲线 $y=\varphi(x)$ 上一点 $P_6=(x_{P_6},y_{P_6})$，且 $\widehat{P_5P_6}$ 在 $x=-C_0$ 的左旁. 同理在 $x=x_{P_6}$ 上可以选取一点 $P_7=(x_{P_6},y_{P_7})$，使 $L^+(P_7)_{(4)}$ 与 $x=-C_0$ 相交于 $P_8=(-C_0,y_{P_8})$，且 $\widehat{P_7P_8}$ 在 $y=D+n$ 的上方. 取向量

$$V_1=(y-\varphi(x),\ -g(x),0),V_2=(y-\varphi(x),\ -yf_1(x)-g_1(x),0)],$$

则

$$V_1\times V_2=(0,0,(y-\varphi(x))[(g(x)-g_1(x))-yf_1(x)]).$$

由 $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_3)$，对 $|x|\geqslant C_0$ 有

$$(y-\varphi(x))[(g(x)-g_1(x))-yf_1(x)]=-f_1(x)(y-\varphi(x))^2\leqslant 0. \tag{9}$$

现考虑由 $\widehat{P_1P_2}\cup\overline{P_2P_3}\cup\widehat{P_3P_4}\cup\widehat{P_4P_5}\cup\overline{P_5P_6}\cup\widehat{P_6P_7}\cup\widehat{P_7P_8}\cup\overline{P_8P_1}$ 围成的区域记为 G_n，由(9)知 G_n 内的(4)的正半轨线不会由 G_n 边界的轨线段部分穿出，而 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}|_{\overline{P_3P_4}}\leqslant 0$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}|_{\overline{P_6P_7}}\geqslant 0$，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}|_{\overline{P_8P_1}}\geqslant 0$，考虑到对给定的 n，G_n 为有界区域，因此无界轨线 $L^+(P_0)_{(4)}$ 只能由 $\overline{P_8P_1}$ 穿出 G_n. 于是存在 $t_n\in[t_0,T)$，使 $x(t_n)=-C_0,y(t_n)=D+n$，同理可证，存在 $\bar{t}_n\in[t_0,T)$，使 $x(\bar{t}_n)=C_0,y(\bar{t}_n)=-D-n$，而 $n\to+\infty$ 时，$y(\bar{t}_n)\to-\infty$，因此，必定存在 $t',t''\in[t_0,T)$ 使

$$x(t')=-C_0,y(t')>y_{P_8},x(t'')=C_0,y(t'')<y_{P_4},$$

从而对取定 n 构成的有界区域 G_n，当 $t>\max(t',t'')$ 时，无界轨线 $L^+(P_0)_{(4)}:(x(t),y(t))$ 必定再不会进入 G_n，即 $L^+(P_0)_{(4)}$ 最终必定远离 G_n. 设 $L^+(P_0)_{(4)}$ 首次穿出且远离 G_n 时交 $\overline{P_8P_1}$ 于点 $A_1=(-C_0,y_{A_1})$，由引理 1 知 $L^+(P_0)_{(4)}$ 交 $x=-C_0$ 于点 A_1 后继续朝右交 $x=C_0$ 于点 $A_2=(C_0,y_{A_2})$，且轨线段 $\widehat{A_1A_2}$ 在 $\widehat{p_1p_2}$ 的上方. 又由引理 2 知，$L^+(A_2)_{(5)}$ 必相交或趋向于 $y=\varphi(x)$ 上一点 $A'_3=(x_{A'_3},y_{A'_3})$，且轨线段 $\widehat{A_2A'_3}$ 在 $\widehat{p_2p_3}$ 的外侧，从而在 $x=x_{A'_3}$ 上选取一点 $A'_4=(x_{A'_3},y_{A'_4})$ 使 $L^+(A'_4)_{(4)}$ 交 $x=-C_0$ 于点 $A'_5=(-C_0,y_{A'_5})$，且轨线段 $\widehat{A'_4A'_5}$ 在 $\widehat{p_4p_5}$ 的下方，又由 $L^+(A'_5)_{(5)}$ 必相交或趋向于 $y=\varphi(x)$ 上一点 $A'_6=(x_{A'_6},y_{A'_6})$，且轨线段 $\widehat{A'_5A'_6}$ 位于 $\widehat{p_5p_6}$ 的外侧，进而在 $x=x_{A'_6}$ 上选取一点 $A'_7=(x_{A'_6},y_{A'_7})$ 使 $L^+(A'_7)_{(4)}$ 与 $x=-C_0$ 相交于一点 A'_8，且轨线段 $\widehat{A'_7A'_8}$ 位于 $\widehat{p_7p_8}$ 的上方，现记 $\widehat{A_1A_2}\cup\widehat{A_2A'_3}\cup\overline{A'_3A'_4}\cup\widehat{A'_4A'_5}\cup\widehat{A'_5A'_6}\cup\overline{A'_6A'_7}\cup\widehat{A'_7A'_8}\cup\overline{A'_8A'_1}$ 围成的区域为 G'_n，容易看出 G'_n 包围了 G_n，$L^+(p_o)_{(4)}$ 经过 A_2 后必会进入 G'_n，而又要远离 G_n，类似于 G_n，G'_n 内(4)的轨线也只能 $\overline{A'_8A_1}$ 穿出，从而 $L^+(p_0)_{(4)}$ 经过 A_1,A_2 后只能顺时针盘旋于区域 G_n 且于 $\overline{A'_8A_1}$ 处穿出区域 G'_n. 设 $L^+(p_0)_{(4)}$ 经过 A_1,A_2 后与 $x=C_0,x=-C_0$ 依次交于点 A_3，

A_4, A_5，记 $A_i=(x_{A_i}, y_{A_i})=(x(t_i), y(t_i)), i=1,2,3,4,5$. 则由 $L^+(p_0)_{(4)}$ 要远离 G_n 有 $y_{A_5}>y_{A_1}$.（下证矛盾）由(4)有

$$
\begin{aligned}
y_{A_2}-y_{A_1} &= \int_{y_{A_1}}^{y_{A_2}} \mathrm{d}y = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{yf_1(x)+g_1(x)}{y-\varphi(x)}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \\
&\leqslant -\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_{-C_0}^{C_0} \frac{|\varphi(x)||f_1(x)|}{|y-\varphi(x)|}\mathrm{d}x + \int_{-C_0}^{C_0} \frac{|g_1(x)|}{|y-\varphi(x)|}\mathrm{d}x \\
&< -[F_1(b)-F_1(a)] + \frac{2C_0M_0^2}{C_2-M_0} + 4M_0C_0\varepsilon \\
&< 0,
\end{aligned}
$$

从而有 $C_2<y_{A_2}<y_{A_1}$，同理可证 $y_{A_3}<y_{A_4}<-C_2$. 而又由

$$
\frac{\mathrm{d}V(x,y)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4)} = -f_1(x)\left[y-\frac{\varphi(x)}{2}\right]^2-\frac{3}{4}f_1(x)\varphi^2(x)-g_1(x)\varphi(x)
$$

和(H_1)，(H_2)，(H_3)知当 $|x|\geqslant C_0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4)}\leqslant 0$. 于是

$$
V(x_{A_2}, y_{A_2})\geqslant V(x_{A_3}, y_{A_3}),\ V(x_{A_4}, y_{A_4})\geqslant V(x_{A_5}, y_{A_5}),
$$

从而有

$$
y_{A_2}\geqslant |y_{A_3}|>C_2,\ |y_{A_4}|\geqslant y_{A_5}>C_2.
$$

因此，$y_{A_1}>y_{A_2}\geqslant |y_{A_3}|>|y_{A_4}|\geqslant y_{A_5}$，当 $y_{A_5}>y_{A_1}$ 矛盾. □

附注 1 (4)，(5)分别回到 Liénard 方程有：

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\left(f_1(x)+\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0, \tag{4'}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0. \tag{5'}
$$

显然，(4′)与(5′)是有很大区别的，而由(5′)的所有解及其导数有界的结论可相应地在定理 1 的条件下推广到(4′)上，这样对我们已知结论的运用就有了很大的灵活性. 而且从定理 1 的证明我们不难看出(H_1)可放松为：

(H_1^*) 存在常数 $K\geqslant 0$，当 $|x|\geqslant K$ 时，$g(x)=g_1(x)+f_1(x)\varphi(x)$.

这样，对上述(4)，(5)解有界性的比较定理又会有更丰富的结论.

推论 1 设(H_1^*)，(H_2)，(H_3)成立，且(4)存在无界解，则(5)也存在无界解.

定理 2 若(0,0)为(4)的唯一负向渐近稳定的奇点，(5)存在非平凡周期解，且

(H_4) $\forall\ x\in R, g(x)=g_1(x)+f_1(x)\varphi(x)$,

(H_5) $\forall\ x\in R, f_1(x)\geqslant 0$,

则(4)也存在非平凡周期解.

证明 由(H_4)，(H_5)知

$$
\forall\ (x,y)\in R^2,\ -f_1(x)(y-\varphi(x))^2\leqslant 0, \tag{10}
$$

从而(5)的非平凡周期解 Γ 可视为包含(4)唯一奇点，(0,0)的环域外境界线，环域内境界线由(0,0)为(4)的负向渐近稳定的奇点可以直接得到，从而定理 2 证毕.

定理 3 (4)有包围所有奇点的非平凡周期解，(H_4)，(H_5)成立，且(5)的所有解正向有界，则(4)存在包围所有奇点的非平凡周期解.

证明 容易验(5)的所有奇点必为(4)的奇点,由(10)知,包围(4)所有奇点的(4)的非平凡周期解可以视为环域外境界线,而(5)的所有解正向有界,由[10]有界轨线的极限集理论容易作出环域的外境界线,定理2证毕.

附注2 定理2,3使得已知关于(5)的周期解存在性的结论可以用于更广泛的形式,同时由(4)得出(4)的周期解存在性结论也可以用到(4)上.

推论2 若Liénard方程(1)存在非平凡周期解,Liénard方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f^*(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0 \tag{1'}$$

有唯一渐近稳定的奇点(0,0)且$f^*(x)\geqslant f(x)(\forall\ x\in R)$,则(1')也存在非平凡的周期解.

例1 证明Liénard方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+(1+2\cos x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4\sin x=0 \tag{11}$$

的所有解及其导数正向有界.

证明 显然,取$f_1(x)\equiv 1,\varphi(x)=2\sin x,g_1(x)=4\sin x-2\sin x=2\sin x$,则(11)可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-2\sin x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y-2\sin x, \tag{12}$$

而由文[4]知$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-2\sin x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2\sin x$的所有解有界,$\varphi(x),g_1(x),f_1(x)$满足$(\mathrm{H}_1),(\mathrm{H}_2),(\mathrm{H}_3)$,于是(12)的所有解正向有界,结论得证.

附注 (11)是非常简单的Liénard方程,其传统等价形式为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y(1+2\cos x)-4\sin x, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-(x+2\sin x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-4\sin x, \tag{14}$$

其中$f(x)=(1+2\sin x),g(x)=4\sin x,F(x)=x+2\sin x,G(x)=4(1-\cos x)$.显然由已知文献中的结论要求的条件:

存在$K\geqslant 0$,当$|x|\geqslant K$时,$xg(x)>0,(x\neq 0)$;或$f(x)\geqslant 0$;或$g(x)F(x)\geqslant 0$.

对于(13),(14)来说均不成立,因而已知文献结论是不能直接用来判定(14)解的有界性,但通过比较定理我们得到了结论,所以定理1在某种程度上放松了已知结论的条件.

参考文献:

[1] BURTON T A. *On the equation $x''+f(x)h(x')x'+g(x)=e(t)$* [J]. Ann. Pura Appl., 1970, **85**: 37-48.

[2] HEIDL J W. *A Lapunov function for a generalized Liénard equation* [J]. J. M. A. A., 1972, **39**: 192-197.

[3] SUGIE J. *On the generalized Liénard equation without the signum condition* [J]. J. M. A. A., 1987, **128**: 80-91.

[4] SUGIE J. *On the boundedness of solutions of the generalized Liénard equation without the signum condition* [J]. Nonlinear Analysis, 1987, **11**: 1391-1397.

[5] HUANG Li-hong. *On the necessary ad sufficient conditions for the boundedness of the solutions of the*

nonlinear oscillating equation [J]. Nonlinear Analysis, 1994, **23**: 467--1475.
[6] HUANG Li-hong. *Boundedness of solutions for some nonlinear differential systems* [J]. Nonlinear Analysis, 1997, **29**: 839—847.
[7] HUANG Li-hong, ZOU Xin-fu. *On the boundedness of solutions of the generalized Liénard system without the signum condition* [J]. Math. Japonica, 1995, **42**: 283—292.
[8] ZHOU Yu-rong. *On the boundedness of the solutions of the nonlinear oscillating equation* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1992, **164**: 9—20.
[9] 张芷芬,丁同仁,等. 微分方程定性理论 [M]. 北京:科学出版社, 1985.
ZHANG Zhi-fen, DING Tong-ren, et al. *Qualitative Theory of Ordinary Equations* [M]. Beijing: Science Press, 1985. (in Chinese)

Comparsion Theorems for Liénard System

LIU Bing-wen
(Dept. of Math., Hunan University of Arts and Science, Hunan 415000, China)

Abstract: This paper studies a new equivalent system of Liénard's equation. Some comparsion theorems are given so that the existence of periodic solutions and the boundedness of solutions to the new equivalent system can be obtained by means of the existence of periodic solutions and the boundedness of solutions to traditional Liénard system. These results extend and improve many existing ones in the literaturs.

Key words: Liénard system; boundedness; periodic solution; comparsion theorem.