第 24 卷第 4 期
2004年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 24 No. 4
Nov. 2004

无容量限制的最小费用流问题*

董振宁[1]，　刘家壮[2]

(1. 广东工业大学经济管理学院，广东 广州 510090；
山东大学数学与系统科学学院，山东 济南 250100)

摘　要：本文研究了无容量限制的带固定费用和可变费用的单物资和二物资的最小费用流问题，并分别给出了多项式算法. 最后应用该算法，计算了一个二物资的最小费用流问题的实例.

关键词：最小费用；网络流；固定费用.

分类号：AMS(2000) 05C55/CLC number：O157

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0751-07

1 引　言

网络流问题在通信及运输领域有着广泛的应用，Ford 和 Fulkerson 于 1957 年首先对单物资的最大流问题给出了算法[1]，后来 Fulkerson 于 1961 年对单物资的最小费用流问题给出了最小费用增广算法[2]. 但是这里所考虑的费用只有可变费用，没有固定费用，而 Trilochan Sastry 于 1997 年研究了带固定费用而没有可变费用的二物资的最小费用流问题[3]，并给出了多项式算法. 这里，我们将要研究既有可变费用又有固定费用的单物资和二物资的最小费用流问题.

2 无容量限制的单物资最小费用流问题

在这一节我们将要研究无容量限制的既有可变费用又有固定费用的单物资最小费用流问题. 我们首先给出它的数学模型，然后给出一个定理刻画出它的最优解的特点，并由此给出多项式算法.

首先给出一个无向图 $G=(V,E)$，其中 V 为顶点集，E 为边集. 其中顶点 s 和 t 分别称为发点和收点. 对于每条边 $(i,j)\in E$，若有 m 个单位流通过边 $(i,j)\in E$，就需要付出固定费用 w_{ij}(与流值 m 无关) 和可变费用 mc_{ij}(与流值 m 成正比). 我们的目标是要寻找一个满足流守恒的从发点 s 到收点 t 的流值为 V 的流 $x=\{x_{ij}\}$，使得固定费用与可变费用的总和最小. 有关网

* 收稿日期：2002-04-02
作者简介：董振宁(1977-)，男，讲师.

络流问题的有关概念可参考文献[4,5].对于单物资的最小费用流问题我们可以给出下面的规划模型：

$$\mathrm{Min} \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}(x_{ij} + x_{ji})$$

subject to：

$$\sum_{j}(x_{ji} - x_{ij}) = \begin{cases} -V & \text{if} \quad i = s, \\ V & \text{if} \quad i = t, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x_{ij} + x_{ji} = 0 \\ 1 & \text{if} \quad x_{ij} + x_{ji} > 0; \end{cases}$$

$$x \geqslant 0$$

目标函数的前半部分是固定费用,后半部分是可变费用.其中 y_{ij} 表示边 (i,j) 上是否有流通过：当 $y_{ij} = 1$ 时,边 (i,j) 上有流通过;否则,没有流通过.x_{ij} 和 x_{ji} 分别表示边 (i,j) 上不同方向的流,它们不可能同时大于零,即 $x_{ij} * x_{ji} = 0$.显然,这是一个非线性规划问题,直接求解比较困难,所以我们将采用网络技术解决它.

在研究最优解的性质之前,我们先来介绍流图、流路以及流路的流值.

定义 1 若 $x = \{x_{ij}\}$ 是无向图 $G = (V,E)$ 上的一个可行流,有向赋权图 $D = (V,A,X)$ 同 $G = (V,E)$ 具有相同的顶点集 V,当且仅当 $x_{ij} > 0$ 时,有向弧 $(i,j) \in A$,$x = \{x_{ij}\}$ 与流 $x = \{x_{ij}\}$ 的值完全相等,则这样的图 $D = (V,A,X)$ 称之为无向图 $G = (V,E)$ 上的一个流 $x = \{x_{ij}\}$ 对应的流图.

定义 2 流图 $D = (V,A,X)$ 上的一条从 s 到 t 有向路 P,称为流路.

定义 3 流路 P 上的所有有向弧 (i,j) 上的权 x_{ij} 的最小值称为流路的流值,记为 $x(P)$,即 $x(P) = \min\{x_{ij},(i,j) \in P\}$.

定理 1 无容量限制的单物资最小费用流问题必定存在只有一条流路的最优解.

证明 由于不考虑容量限制,因而可行解以及最优解的存在是显然的.

假设最优解 $x = \{x_{ij}\}$ 具有 m 条流路 $P_1,P_2,\cdots,P_m$,不妨设对于任意的 k,都有 $c(P_1) = \sum_{(i,j)\in P_1} \leqslant c(P_k) = \sum_{(i,j)\in P_k} c_{ij}$.即 P_1 是所有流路里面可变费用最小的.现在令 $x(P_1) = \sum_{i=1}^{m} x(P_i)$,$x(P_i) = 0, i = 2,3,\cdots,m$,即将其它流路上的流都移到流路 P_1 上,则新形成的流 $x' = \{x'_{ij}\}$ 的费用：

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} y'_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}(x'_{ij} + x'_{ji}) \\ & = \sum_{(i,j)\in P_1} w_{ij} + \sum_{(i,j)\in P_1} c_{ij} x'_{ij} \\ & \leqslant \sum_{(i,j)\in \bigcup_{k=1}^{m} P_k} w_{ij} + \sum_{k=1}^{m} x(P_k) * \sum_{(i,j)\in P_1} c_{ij} \\ & \leqslant \sum_{(i,j)\in \bigcup_{k=1}^{m} P_k} w_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \{x(P_k) \sum_{(i,j)\in P_k} c_{ij}\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}y_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}(x_{ij} + x_{ji})$$

而上述不等式的最后一项显然是原来的流 $x = \{x_{ij}\}$ 的费用,也即我们将 m 条流路 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 上的流都移到流路 P_1 上,并没有增加流的费用,而原来的流 $x = \{x_{ij}\}$ 是最优解,因而新构成的流 $x' = \{x'_{ij}\}$ 也是最优解. 所以,无容量限制的单物资最小费用流问题必定存在只有一条流路的最优解.

很明显,我们在证明的过程中,并没有用到不存在其它物资流的条件,因而不仅单物资的无容量限制的最小费用流问题存在只有一条流路的最优解,而且在多种物资的情况下,也一定存在每种物资只有一条流路的最优解.

由于一定存在只有一条流路的最优解,所以我们可以只在一条流路的可行解中寻找. 又因为无向图 $G = (V, E)$ 没有容量限制,所以任意一条从 s 到 t 的路就是一个可行解,而且如果某条边 (i, j) 上有流通过,则 $x(i, j) = V$. 因而将可变费用 $c_{ij}x_{ij}$ 当作固定费用考虑. 所以令 $w'_{ij} = w_{ij} + c_{ij}V$,则原问题转化为在无向图 $G = (V, E)$ 中,以 w'_{ij} 为边的长度,求从 s 到 t 的最短路问题. 由此,我们可以得到下面的算法:

算法 1

Step1:对无向图 $G = (V, E)$ 中所有的边 $(i, j) \in E$,令 $w'_{ij} = w_{ij} + c_{ij}V$.

Step2:在赋权无向图 $G = (V, E, W')$ 中,调用 Dijkstra 算法[6],求解一条从 s 到 t 的最短有向路 P.

Step3:对于所有的边 $(i, j) \in E$,令 $x_{ij} = \begin{cases} V, & \text{if}(i, j) \in P; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$

根据前面的分析知道,算法 5 得到的流 $x = \{x_{ij}\}$ 就是所求的最优解. 下面我们来分析算法的复杂性.

定理 2 算法 1 的复杂性是 $O(n^2)$.

证明 算法 1 的 Step1,需要对所有的边分别计算一遍,因而需要重复 $|E| \leqslant \frac{|V|^2}{2} = \frac{n^2}{2}$ 次;在 Step2 中,Dijkstra 算法的复杂性是 $O(n^2)$[4,5];在 Step3 中,同 Step1 一样,需要重复的次数不超过 $\frac{n^2}{2}$,所以算法 1 的复杂性是 $O(n^2)$.

3 无容量限制的二物资最小费用流问题

在第二节我们研究了单物资的最小费用流问题,在这一节我们将要研究二物资的最小费用流问题. 在无向图 $G = (V, E)$ 中,顶点 s_1 和 t_1 分别称为物资 1 的发点和收点,顶点 s_2 和 t_2 分别称为物资 2 的发点和收点. 对每条边 $(i, j) \in E$,给定一个固定费用 w_{ij} 和两个可变费用 c^1_{ij} 和 c^2_{ij},两个可变费用分别对应于物资 1 和物资 2. 只要有流通过边 $(i, j) \in E$,不论是物资 1 还是物资 2,或者两种物资都通过,我们都只需付出 w_{ij} 的固定费用,可变费用应该等于两种物资的流量分别乘以各自对应的可变费用 c^1_{ij} 和 c^2_{ij} 之和. 我们的目标是在无向图 $G = (V, E)$ 上求一个流 $x = \{(x^1_{ij}, x^2_{ij})\}$,使得从 s_1 到 t_1 的流的值为 V_1,从 s_2 到 t_2 的流的值为 V_2,且总的固定费用与可变费用之和最小. 下面给出它的规划模型:

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}y_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} \{c_{ij}^1(x_{ij}^1 + x_{ji}^1) + c_{ij}^2(x_{ij}^2 + x_{ji}^2)\}$$

subject to:

$$\sum_j (x_{ji}^1 - x_{ij}^1) = \begin{cases} -V_1 & \text{if} \quad i = s_1, \\ V_1 & \text{if} \quad i = t_1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\sum_j (x_{ji}^2 - x_{ij}^2) = \begin{cases} -V_2 & \text{if} \quad i = s_2, \\ V_2 & \text{if} \quad i = t_2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & if \quad x_{ij}^1 + x_{ji}^1 + x_{ij}^2 + x_{ji}^2 = 0, \\ 1 & \text{if} \quad x_{ij}^1 + x_{ji}^1 + x_{ij}^2 + x_{ji}^2 > 0; \end{cases}$$

$$x \geqslant 0.$$

在第二节我们引进了流路的概念，这里介绍一下共享路、前向共享路与逆向共享路的概念[3].

定义 4 若路 P 既在物资 1 的流路 P_1 上，又在物资 2 的流路 P_2 上，而且不存在满足此性质的路 P'，使得 $P' \supset P$，则路 P 称为物资 1 与物资 2 的共享路. 若 P_1 与 P_2 在 P 上同向，则称 P 是前向共享路，否则，称为逆向共享路.

在无向图 $G = (V,E)$ 中，在任意两点 v_1 与 v_2 之间，对每条边 (i,j) 以 $w_{ij} + c_{ij}^1V_1$ 为权，可以求得一条从 v_1 到 v_2 的最短路 $P(v_1,v_2,1)$，其长度记为 $d(v_1,v_2,1)$；对每条边 (i,j) 以 $w_{ij} + c_{ij}^2V_2$ 为权，可以求得一条从 v_1 到 v_2 的最短路 $P(v_1,v_2,2)$，其长度记为 $d(v_1,v_2,2)$；对每条边 (i,j) 以 $w_{ij} + c_{ij}^1V_1 + c_{ij}^2V_2$ 为权，可以求得一条从 v_1 到 v_2 的最短路 $P(v_1,v_2,3)$，其长度记为 $d(v_1,v_2,3)$. 显然，$d(v_1,v_2,1)$ 代表物资 1 从 v_1 到 v_2 的最小费用，$d(v_1,v_2,2)$ 代表物资 2 从 v_1 到 v_2 的最小费用，$d(v_1,v_2,3)$ 代表了物资 1 和物资 2 沿着同一条路从 v_1 到 v_2 的最小费用.

现在我们来利用无向图 $G = (V,E)$ 构造一个新的无向图. 在无向图 $G = (V,E)$ 中，若 $d(i,j,1) + d(i,j,2) < d(i,j,3)$，则在 $G = (V,E)$ 中添加一条边 (i,j)，并给它赋权 $w_{ij} = d(i,j,1) + d(i,j,2)$，$c_{ij}^1 = c_{ij}^2 = 0$. 则显然 $w_{ij} \geqslant d(i,j,1)$，且 $w_{ij} \geqslant d(i,j,2)$. 对 $G = (V,E)$ 中的每一对点都进行比较，并添加边后构成的新图，称为原图的费用图，且 $W(G) = (V,E')$.

在第二节定理 1 已经说明，在二物资最小费用流问题中，一定存在一个每种物资只有一条流路的最优解，下面我们来介绍无容量限制的二物资最小费用流问题最优解的另一个性质.

定理 3 在费用图 $W(G) = (V,E')$ 中，无容量限制的二物资最小费用流问题必存在一个只有一条共享路的最优解.

证明 无容量限制的二物资最小费用流问题存在每种物资只有一条流路的最优解，不妨设最优解中物资 1 和物资 2 对应的流路分别为 P_1 和 P_2，现在假设 P_1 和 P_2 有两条以上的共享路，如图 1 所示. 其中 P_1 从 s_1 出发，经过 A,B,C,E,F 到达 t_1，P_2 从 s_2 出发，经过 A,B,D,E,F 到达 t_2，AB 之间的路和 EF 之间的路是两条共享路. 若 $d(B,E,1) + d(B,E,2) > d(B,E,3)$，则物资 1 和物资 2 沿 $d(B,E,3)$ 对应的最短路前进，所付出的总费用显然要小于上图所示解的费用，这与它是最优解矛盾；若 $d(B,E,1) + d(B,E,2) = d(B,E,3)$，则物资 1 和物资 2 沿 $(B,E,3)$ 对应的最短路前进，所付出的总费用等于上图所示解的费用，因而它也是最优解，所以存

在只有一条共享路的最优解；若 $d(B,E,1)+d(B,E,2)<d(B,E,3)$，则在费用图 $W(G)=(V,E')$ 中存在边 $(B,E)\in E'$，且 $w_{BE}=d(B,E,1)+d(B,E,2)$，所以物资1和物资2通过边 (B,E) 在费用图 $W(G)=(V,E')$ 中也是可行的，而且费用不增加，因而也是最优解. 所以，在费用图 $W(G)=(V,E')$ 中，无容量限制的二物资最小费用流问题必存在一个只有一条共享路的最优解.

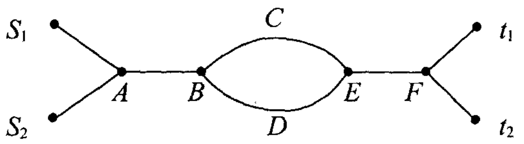

图 1

算法 2

Step1：对于无向图 $G=(V,E)$ 中所有的边 $(i,j)\in E$，计算 $L(i,j,1)=w_{ij}+c_{ij}^1V_1$，$L(i,j,2)=w_{ij}+c_{ij}^2V_2$，$L(i,j,3)=w_{ij}+c_{ij}^1V_1+c_{ij}^2V_2$.

Step2：对于无向图 $G=(V,E)$ 分别以 $L(i,j,1)$，$L(i,j,2)$，$L(i,j,3)$ 为边 (i,j) 的长度，调用 Floyd 算法[4,5,7]，求出所有点对间的最短距离 $d(i,j,1)$，$d(i,j,2)$，$d(i,j,3)$.

Step3：对于无向图 $G=(V,E)$ 中所有的点对 (i,j) 进行比较，如果 $d(i,j,1)+d(i,j,2)<d(i,j,3)$，则添加一条边 (i,j)，并给它赋权 $w_{ij}=d(i,j,1)+d(i,j,2)$，$c_{ij}^1=c_{ij}^2=0$，令 $L(i,j,3)=w_{ij}$. 以此构造费用图 $W(G)=(V,E')$.

Step4：在费用图 $W(G)=(V,E')$ 中，添加顶点 s 和 t，对于 V 中的任意顶点 i，连接顶点 s 和 i 以及顶点 t 和 i，并令

$$L(s,i,3)=d(s_1,i,1)+d(s_2,i,2)$$
$$L(t,i,3)=d(t_1,i,1)+d(t_2,i,2)$$

调用 Dijkstra 算法[6]，求出从 s 到 t 的最短路 $P'(s\to A\to B\to t)$，其长度记为 $d(s,t,3)$.
再令

$$L(s,i,3)=d(s_1,i,1)+d(t_2,i,2)$$
$$L(t,i,3)=d(t_1,i,1)+d(s_2,i,2)$$

调用 Dijkstra 算法，求出从 s 到 t 的最短路 $P'(s\to A\to B\to t)$（顶点 A,B 分别是 P 的第二个与倒数第二个顶点），其长度记为 $d'(s,t,3)$.

Step5：Case1：若 $min\{d(s,t,3),d'(s,t,3)\}\geqslant d(s_1,t_1,1)+d(s_2,t_2,2)$，则最小费用为 $d(s_1,t_1,1)+d(s_2,t_2,2)$，最小费用流为物资1和物资2分别沿 $d(s_1,t_1,1)$ 和 $d(s_2,t_2,2)$ 所对应的最短路，从各自的发点流向收点. 每条边上若有物资1流过，则 $x_{ij}^1=V_1$，否则 $x_{ij}^1=0$；每条边上若有物资2流过，则 $x_{ij}^2=V_2$，否则 $x_{ij}^2=0$；

Case2：若 $\min\{d(s,t,3),d'(s,t,3)\}=d(s,t,3)<d(s_1,t_1,1)+d(s_2,t_2,2)$，则最小费用为 $d(s,t,3)$，最小费用流为物资1沿 $s_1\to A\to B\to t_1$ 流动，物资2沿 $s_2\to A\to B\to t_2$ 流动. 顶点 A,B 之间沿 $d(A,B,3)$ 对应的最短路前进. 若经过边 $(i,j)\in E'/E$，则物资1和物资2在 i,j 之间分别沿 $d(i,j,1)$，$d(i,j,2)$ 对应的最短路流动. 同上求出 $x=\{(x_{ij}^1,x_{ij}^2)\}$；

Case3：若 $\min\{d(s,t,3),d'(s,t,3)\}=d'(s,t,3)<d(s_1,t_1,1)+d(s_2,t_2,2)$，则同上最小

费用为 $d'(s,t,3)$，最小费用流为物资 1 沿 $s_1 \to A \to B \to t_1$ 流动，而物资 2 沿 $s_2 \to B \to A \to t_2$ 流动. 顶点 A,B 之间是沿 $d(A,B,3)$ 对应的最短路前进.

从 Step1 到 Step3，我们构造出费用图 $W(G) = (V,E')$，在 Step4 我们分别计算了只有一条前向共享路和只有一条后向共享路的情况下的最小费用，在 Step5 我们比较了没有共享路、只有一条前向共享路和只有一条后向共享路的最小费用，并分三种情况讨论了对应的最小费用流.

定理 4 算法 2 的复杂性 的 $O(n^3)$.

证明 在 Step1 算法共重复 $|E| \approx O(n^2)$；在 Step2，三次调用 Floyd 算法，其复杂性是 $O(n^3)$[4,5]；在 Step3，对所有的点对 (i,j) 进行比较，最多需要 $O(n^2)$；在 Step4，添加顶点 s,t 以及与之相关边最多需要 $O(n)$，两次调用 Dijksgra 算法复杂性为 $O(n^2)$；在 Step5，需要根据比较结果写出最小费用流，相当于重新搜索一次最短路，复杂性仍然是 $O(n^2)$. 因而，算法总的复杂性取决于 Step2，为 $O(n^3)$.

4 例 子

由于无容量限制的单物资最小费用流问题比较简单，这里我们只举一个无容量限制的二物资最小费用流问题的例子，来加深对该问题算法的理解.

例 在图 2 所示的网络中，顶点 1 和顶点 2 分别是物资 1 和物资 2 的发点，顶点 6 和顶点 5 分别是物资 1 和物资 2 的收点，边 (i,j) 上所标的三个数依次是 $(w_{ij}, c^1_{ij}, c^2_{ij})$. 要求求出一个物资 1 和物资 2 的流值分别为 2 和 3 的最小费用流.

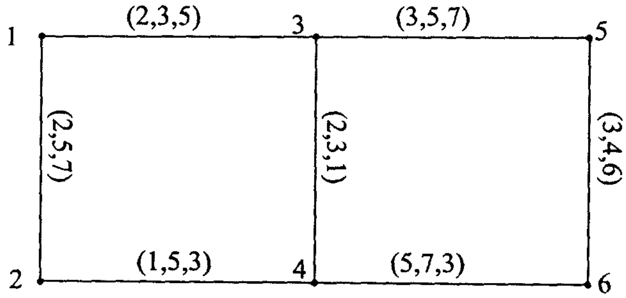

图 2

解 首先经过 Floyd 算法计算，各个点对间的最短距离如下表所示，其中每个单元格中的三个数依次为 $d(i,j,1), d(i,j,2), d(i,j,3)$. 因为对任意两点 $i,j \in V$，都有 $d(i,j,1) + d(i,j,2) > d(i,j,3)$，所以不需要添加任何边，费用图 $W(G) = (V,E')$ 同无向图 $G = (V,E)$ 相同. 然后在图 $G = (V,E)$ 上添加顶点 s 和 t，并添加相应的边，最后通过调用 Dijkstra 算法，求得 $d(s,t,3) = 68$，对应的最短路为 $P(s \to 3 \to 5 \to t)$；$d'(s,t,3) = 71$，相应的最短路为 $P'(s \to 3 \to t)$. 又因为：$d(1,6,1) + d(2,5,2) = 32 + 39 = 71 > 68 = d(s,t,3) = \min\{d(s,t,3), d'(s,t,3)\}$，满足 Step5 的 Case2. 所以最小费用流为：物资 1 沿 $1 \to 3 \to 5 \to 6$ 流动，相应边上的流量都是 2；物资 2 沿 $2 \to 4 \to 3 \to 5$ 流动，相应边上的流最都是 3. 此时总费用为 68.

距离 顶点 / 顶点	1	2	3	4	5	6
1	0,0,0	12,23,33	8,17,23	16,22,34	21,41,57	32,36,62
2	12,23,33	0,0,0	19,15,31	11,10,20	32,39,65	30,24,48
3	8,17,23	19,15,31	0,0,0	8,5,11	13,24,34,	24,19,39
4	16,22,34	11,10,20	8,5,11	0,0,0	21,29,45	19,14,28
5	21,41,57	32,39,65	13,24,34	21,29,45	0,0,0	11,21,29
6	32,36,62	30,24,48	24,19,39	19,14,28	11,21,29	0,0,0

参考文献:

[1] FORD L R, FULKERSON D R. *A simple algorithm for finding maximal Network Flows and an application to the Hitchcock problem* [J]. Canada. J. Math., 1957, **9**: 210—218.

[2] FULKERSON D R. *An out-of-kilter method for minimal cost flow problems* [J]. SIAM. J. Appl. Math., 1961, **9**: 18—27.

[3] SASTRY T. *A characterization of the two-commodity netwowr design problem* [J]. Networks, 2000, **36**(1): 9—16.

[4] 刘家壮,王建方. 网络最优化[M]. 武汉:华中工学院出版社, 1987, 8.
LIU Jia-zhuang, WANG Jian-fang. *Network Optimization* [M]. Wuhan: Huazhong Polytechnic College Press, 1987, 8.

[5] 刘家壮,徐源. 网络最优化[M]. 北京:高等教育出版社, 1991, 8.
LIU Jia-zhuang, XU Yuan. *Network Optimization* [M]. Beijing, Higher Education Press, 1991, 8.

[6] DIJKSTRA E W. *A note on two problems in connection with graphs* [J]. Numer. Math., 1959, **1**: 269—271.

[7] FLOYD R W. *Algorithm* 97, *shortest path* [J]. Comm ACM, 1962, **5**: 345.

Uncapacitated Minimum Cost Flow Problem

DONG Zhen-ning[1], LIU Jia-zhuang[2]

(1. Economic and Management School, Guangdong Technology University, Guangzhou 510090, China;
2. School of Mathematic and Systems Science, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: We study uncapacitated version of the minimum cost flow problem of one-commodity and two-commodity with not only fixed cost but also variable cost, and give them each a polynomial algorithm. Moreover, we solve an example of uncapacitated two-commodity minimum cost flow problem with the algorithm.

Key words: minimum cost; network flow; fixed cost.